الجديد في الرياضيات

السنة الثانية من التعليم الثانوي

علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي



دار الشريفة

تأليف : ا. حمزة



فهرس

تم تحميل الكتاب من موقع الدراسة الجزائري

www.eddirasa.com



الدرس : 1



عموميات على الدوال

❶ . تذكير حول الدوال

نرمز بـ D_f إلى مجموعة تعريف الدالة f و (C_f) إلى المنحني الممثل للدالة f في معلم معلوم .

1.1 مجموعة تعريف دالة :

اذا كانت f دالة و D_f مجموعة تعريفها . فان من اجل كل عدد حقيقي x من D_f نرفقه بعدد حقيقي وحيد يرمز له بـ $f(x)$ ونسمي $f(x)$ صورة x بالدالة f .
و لتعيين مجموعة تعريف الدالة f نبحث عن مجموعة قيم x من IR بحيث $f(x)$ نستطيع حسابه .

مثال 1

لتكن f دالة ترفق بكل x من IR العدد الحقيقي $f(x)$ حيث : $f(x)=\frac{5x+1}{x-1}$.

لكي نستطيع حساب $f(x)$ يجب ان يكون $\frac{2x+1}{x-1}$ معرف اي $x-1\neq 0$ ومنه نستنتج $x\neq 1$.

اذن من اجل كل قيم x من $IR-\{1\}$ نستطيع حساب $f(x)$ و بالتالي $D_f=IR-\{1\}$

مثال 2

لتكن f دالة ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الحقيقي $f(x)$ حيث :

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$$

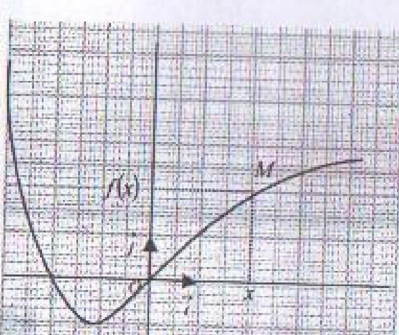
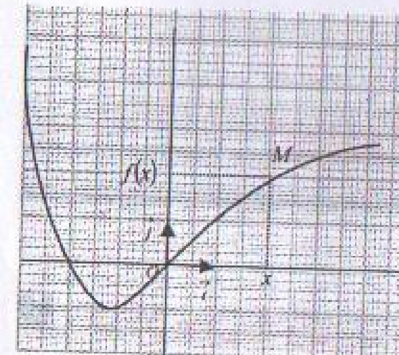
اوجد مجموعة تعريف الدالة f .

✓ الحل :

حتى يكون $f(x)$ معرف يجب ان يكون $\frac{x}{x^2-1}$ معرف .

و حتى يكون $\frac{x}{x^2-1}$ معرف يجب ان يكون $x^2-1\neq 0$ و منه ينتج $x\neq 1$ و $x\neq -1$

و عليه فان $D_f = IR-\{-1 , 1\}$

2.1 المنحنى البياني لدالة

• f دالة معرفة على المجموعة D_f .

المنحنى البياني للدالة f في معلم معطى هو مجموعة النقط $M(x , y)$ و $x\in D_f$ و $y=f(x)$

• القول ان النقطة $M(x , y)$ تنتمي الى المنحنى البياني للدالة f يكافئ القول ان $y=f(x)$ و $x\in D_f$ و نقول ايضا ان $y=f(x)$ هي معادلة المنحنى في المعلم المعطى .

ملاحظة

معادلة المنحنى تسمح لنا بمعرفة هل نقطة ما ، تنتمي اليه ام لا .

مثال 3

ليكن (γ) منحنى معادلته $y=x^2$.

هل النقطة $A(1,2)$ تنتمي الى المنحنى (γ) ؟

✓ الحل :

الدالة f التي منحناها البياني (γ) هي الدالة التي ترفق بكل x من IR .

العدد الحقيقي $f(x)$ حيث ، $y=f(x)$

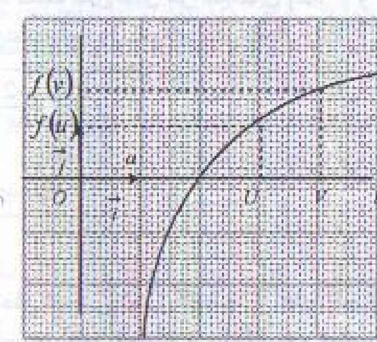
اذن ، $f(x)=x^2$.

بما ان $f(1)=1^2=1$ فان النقطة $A(1,2)$ لا تنتمي الى المنحنى (γ)

3.1 اتجاه تغير الدالة

• f دالة متزايدة تماما على المجال I اذا وفقط اذا كان من اجل كل عددين حقيقيين u و v من I : $u<v$ سيستلزم $f(u)<f(v)$

• f دالة متناقصة تماما على المجال I اذا وفقط اذا كان من اجل كل عددين حقيقيين u و v . من I : $u<v$ سيستلزم $f(u)>f(v)$



الدالة f متزايدة تماما على $[a , b]$

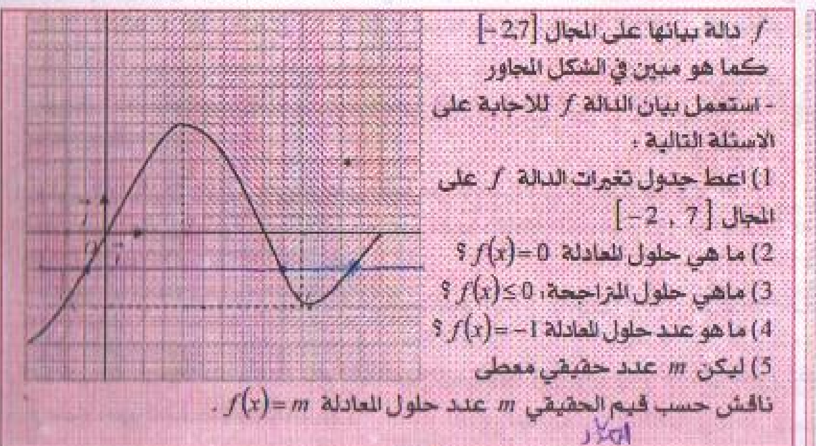
الدالة f متناقصة تماما على $[a , b]$

ملاحظات

1) تعريف الدالة المتزايدة نحصل عليه بتبديل المتباينة $f(u)<f(v)$ بالمتباينة $f(u)\le f(v)$ و كذلك تعريف الدالة المتناقصة نحصل عليه بتبديل المتباينة $f(u)>f(v)$ بالمتباينة $f(u)\ge f(v)$.

2) اذا كانت الدالة f متزايدة تماما او متناقصة تماما على المجال I تقول عنها دالة رتبة في هذا المجال .

تمرين تدريبي



f دالة بيانها على المجال $[-2,7]$ كما هو مبين في الشكل المجاور

- استعمل بيان الدالة f للاجابة على الاسئلة التالية :

1) اعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-2 , 7]$

2) ما هي حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

3) ماهي حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ ؟

4) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=-1$ ؟

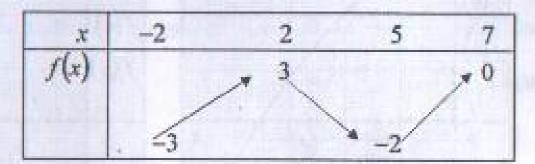
5) ليكن m عدد حقيقي معطى

ناقش حسب قيم الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.



✓ الحل :

1) نلاحظ من الشكل ان الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-2,2]$ و $[5,7]$ و متناقصة تماما على المجال $[2,5]$. وعليه فجدول تغراتها على المجال $[-2,7]$ هو :



x	-2		2		5		7
$f(x)$	-3	↗	3	↘	-2	↗	0

2) تعيين حلول المعادلة $f(x)=0$.

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة f على المجال $[-2,7]$ مع المستقيم ذو المعادلة $y=0$. و بصيغة اخرى حلول المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل النقط من المنحنى التي تراتيبها معدومة ، ومن الشكل نستنتج ان مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي المجموعة $\{0,4,7\}$

3) تعيين حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ ،

تعيين حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ يؤول الى ايجاد فواصل النقط من المنحنى التي ترتيبها معدوم او سالب ، هذه النقط تقع على حامل محور الفواصل او تحته ومن الشكل نلاحظ ان النقط التي تنتمي إلى حامل محور الفواصل أو تحته ، فواصلها تنتمي إلى المجال $[4,7]$ أو $[-2,0]$ و عليه فان مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ هي $[-2,0]\cup[4,7]$

4) تعيين عدد حلول المعادلة $f(x)=-1$.

حلول المعادلة $f(x)=-1$ هي فواصل نقط من المنحنى التي تراتيبها يساوي -1. نرسم المستقيم ذو المعادلة $y=-1$. في نفس المعلم السابق ، فواصل نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة f على المجال $[-2,7]$ و المستقيم ذوا المعادلة $y=-1$ هي حلول المعادلة $f(x)=-1$.

توجد ثلاث نقط مشتركة بين المستقيم و المنحنى و بالتالي المعادلة $f(x)=-1$ تقبل ثلاث حلول سالبة .

5) حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط من المنحنى التي تراتيبها يساوي m .

اذن عدد حلول المعادلة $f(x)=m$ هو عدد نقط تقاطع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=m$ و المنحنى (γ) .

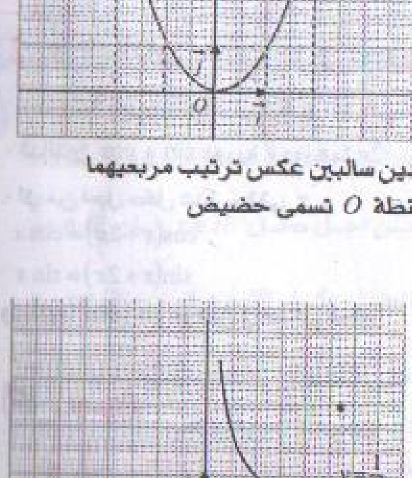
- نلاحظ ان لما m يتغير في IR فان المستقيم $y=m$ يكون دوما موازي لحامل محور الفواصل .

اذا لايجاد نقط تقاطع (γ) مع (Δ) نزيح المستقيم (Δ) بموازات حامل محور الفواصل وعليه نميز عدة حالات للعدد m .

- اذا كان $m < -3$ فان المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$
- اذا كان $m=-3$ فان المعادلة لها حل وحيد هو -2
- اذا كان $-3 < m < -2$ فان المعادلة لها حل وحيد
- اذا كان $m=-2$ فان المعادلة لها حلين احدهما 5
- اذا كان $-2\le m\le 0$ فان المعادلة لها ثلاث حلول
- اذا كان $0 < m < 3$ فان المعادلة لها حلين
- اذا كان $m=3$ فان المعادلة لها حل وحيد هو 3
- اذا كان $m > 3$ فان المعادلة ليس لها حلول

2. ملخص عام حول الدوال المرجعية

1.2 الدالة $f:x\mapsto x^2$.



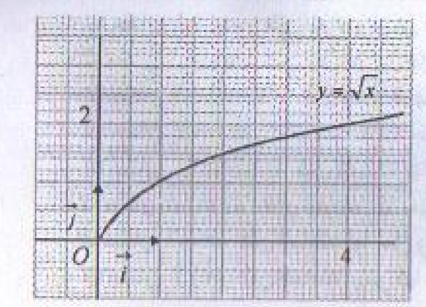
- مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f=IR$.
- الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$.
- اذا كان $0\le u < v$ فان $u^2 < v^2$ اي ترتيب عددين موجبين بنفس ترتيب مربعيهما
- اذا كان $u < v\le 0$ فان $u^2 > v^2$ اي ان ترتيب عددين سالبين عكس ترتيب مربعيهما
- المنحنى البياني للدالة f يسمى قطع مكافئ و النقطة O تسمى حضيض

2.2 الدالة $f:x\mapsto \frac{1}{x}$.

- مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f=IR-\{0\}$
- الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$
- اذا كان $0 < u < v$ فان $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$ اي ان ترتيب عددين موجبين هو عكس ترتيب مقلوبهما .
- اذا كان $u < v < 0$ ، فان $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$ اي ان ترتيب عددين سالبين هو عكس ترتيب مقلوبيهما
- المنحنى الممثل للدالة f يسمى قطع زائد

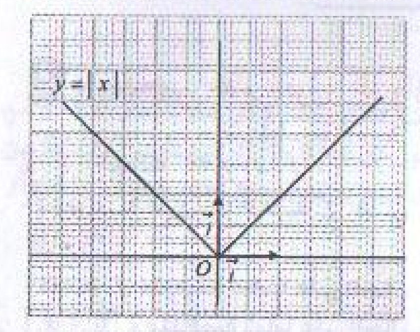
3.2 الدالة $f: x \mapsto \sqrt{x}$.

- مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f=[0,+\infty[$
- الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$
- اذا كان $0 < u < v$ فان $\sqrt{u} < \sqrt{v}$ اي ان ترتيب عددين حقيقين موجبين هو نفس ترتيب جذريهما التربيعي



4.2 الدالة $f: x \mapsto |x|$.

- مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f=IR$
- الدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty,0]$



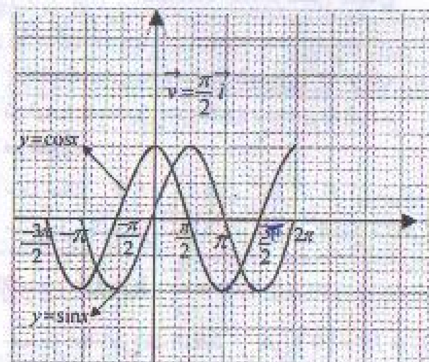
5.2 الدالتان $x\mapsto \cos x$ و $x\mapsto \sin x$

- مجموعة تعريف الدالتين cos و sin هي IR
- الدالتين cos و sin دورية و دورهما 2π
- اي من اجل كل عدد حقيقي x :

$\cos(x+2\pi)=\cos x$

$\sin(x+2\pi)=\sin x$

وبيانهما كما هو موضح في الشكل المجاور



ملاحظة

نلاحظ من الشكل اعلاه اننا نحصل على بيان الدالة sin بسحب بيان الدالة cos بواسطة انسحاب شعاعه $\frac{\pi}{2}\vec{i}$

3 - الدالة الزوجية و الدالة الفردية

1.3 الدالة الزوجية

f دالة مجموعة تعريفها D_f

نقول ان f زوجية اذا وفقط اذا كان ، من اجل كل $x\in D_f$ ، فان $-x\in D_f$ و $f(-x)=f(x)$.

وفي هذه الحالة المنحنى البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس يقبل حامل محور التراتيب كمحور تناظر له

2.3 الدالة الفردية

f دالة مجموعة تعريفها D_f

نقول ان f دالة فردية اذا وفقط اذا كان ، من اجل كل $x\in D_f$ ، فان $-x\in D_f$ و $f(-x)=-f(x)$.

وفي هذه الحالة المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس يقبل مبدا المعلم كمركز تناظر له

مثال 1

1) الدالة $x\mapsto \sin x$ دالة فردية لان من اجل كل $x\in IR$ فان $-x\in IR$ و $\sin(-x)=-\sin x$

2) الدالة $x\mapsto \cos x$ زوجية لان من اجل كل $x\in IR$ ، فان $-x\in IR$ و $\cos(-x)=\cos x$

3) الدالة $x\mapsto |x|$ زوجية لان من اجل كل $x\in IR$ ، $-x\in IR$ و $|-x|=|x|$

4) $x\mapsto \sqrt{x}$ لا هي زوجية ولا فردية لان مجموعة تعريفها هي : $[0,+\infty[$ واذا كان $x\in[0,+\infty[$ فان $-x\notin[0,+\infty[$

مثال 2

لتكن f و g و h ثلاث دوال معرفة على IR كما يلي : $f(x)=x^3+x^2$ ، $g(x)=x^2\sqrt{x^2+1}$ ، $h(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

ادرس شفعية الدوال f , g , h

✓ الحل :

1) دراسة شفعية الدالة f

الدالة f معرفة على IR ومن اجل كل عدد حقيقي x

$$f(-x)=(-x)^3+(-x)^2=-x^3+x^2$$

اذن: $f(-x)\neq f(x)$ و $f(-x)\neq -f(x)$ ومنه الدالة f ليست زوجية ولا فردية

2) دراسة شفعية الدالة g

الدالة g معرفة على IR ومن اجل كل عدد حقيقي x

$$f(-x)=(-x)^2\sqrt{(-x)^2+1}=x^2\sqrt{x^2+1}=f(x)$$

لان: $(-x)^2=x^2$ وبتالي الدالة f زوجية

3) دراسة شفعية الدالة h : الدالة h معرفة على IR ومن اجل كل عدد حقيقي x

$$h(-x)=\frac{2(-x)}{\sqrt{(-x)^2+1}}=-\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=-f(x)$$

ومنه الدالة h فردية

4. عمليات على الدوال

1.4 تساوي دالتين

نقول ان: f و g دالتين متساويتين اذا وفقط اذا كان لهما نفس مجموعة التعريف D ومن اجل كل عدد حقيقي $x\in D$ يكون لدينا: $f(x)=g(x)$ ، ونكتب عندئذ: $f=g$

مثال 1

لتكن f دالة معرفة على IR ب: $f(x)=x^2$ و g دالة معرفة بالشكل:

$$g(x)=\frac{x^3+2x^2}{x+2}$$

1) اوجد مجموعة تعريف f و g

2) بين ان من اجل كل $x\in IR-\{-2\}$: $f(x)=g(x)$

3) هل الدالتين f و g متساويتين واذا كان الجواب بلا عين المجموعة التي تكون فيها الدالتين متساويتين

✓ الحل :

1) الدالة f معرفة على R إذا: $D_f=IR$

تكون الدالة g معرفة اذا وفقط اذا كان: $x+2\neq 0$ اي: $x\neq -2$ ومنه $D_g=IR-\{-2\}$

2) من اجل كل $x\in IR-\{-2\}$ ، $g(x)=\frac{x^3+2x^2}{x+2}=\frac{x^2(x+2)}{(x+2)}=x^2=f(x)$

3) الدالتين f و g غير متساويتين لان: $D_f\neq D_g$

إذن المجموعة التي تكون فيها الدالتين f و g متساويتين هي: $IR-\{-2\}$

2.4 العمليات الجبرية على الدوال

f و g دالتين معرفتين على D_f و D_g على الترتيب

- اذا كان $x\in D_f$ و $x\in D_g$ فان: x له صورة $f(x)$ بالدالة f وصورة $g(x)$ بالدالة g

الجدول الأتي يبين لنا العمليات (الجمع و الفرق والضرب والقسمة)

العملية	الترميز	الكتابة	مجموعة تعريف D
الجمع	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D=D_f\cap Dg$
الفرق	$f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D=D_f\cap D_g$
الجداء	$f\times g$	$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$	$D=D_f\cap D_g$
القسمة	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D=D_f\cap D_g$ و $g(x)\neq 0$

مثال

f و g دالتين معرفتين على IR بالشكل: $f(x)=x^2$ ، $g(x)=\frac{1}{2}x+1$

الدالة $f+g$ معرفة على IR ب: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+\frac{1}{2}x+1$

اذن: $(f+g)(x)=x^2+\frac{1}{2}x+1$

3.4 تركيب الدوال

لتكن f و g دالتان

الدالة gof وتقرا "g تركيب f" معرفة ب: $(gof)(x)=g(f(x))$

مثال

$f(x)=x^2$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$ ، $D_f=IR$ و $D_g=[-1,+\infty[$

في عبارة $g(x)$ نعوض x ب: $f(x)$ عندئذ نجد:

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)+1}=\sqrt{x^2+1}$$

اذن gof هي الدالة $x\mapsto\sqrt{x^2+1}$ والمعرفة على IR

ملاحظة

1) الكتابة $(go\,f)(x)=g(f(x))$ لها معنى اذا كان $x\in D_f$ و $f(x)\in D_g$
اذا مجموعة تعريف الدالة $go\,f$ هي مجموعة العناصر x بحيث $x\in D_f$ و $f(x)\in D_g$

2) بنفس الطريقة الدالة $fo\,g$ هي الدالة المعرفة بـ : $(fo\,g)(x)=f(g(x))$

3) بصفة عامة $fo\,g\neq go\,f$

مثال

لتكن f و g دالتين معرفتين على IR بـ : $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=2x-1$
احسب $(go\,f)(x)$ و $(fo\,g)(x)$

الحل :

$(go\,f)(x)=g(f(x)) = 2f(x)-1 = 2(x^2+1)-1 = 2x^2+1$

$(f\,o\,g)(x)=f(g(x)) = (2x-1)^2+1 = 4x^2-4x+1+1 = 4x^2-4x+2$

نلاحظ ان : $(go\,f)(x)\neq(fo\,g)(x)$

تمرين تدريبي

f و g دالتين معرفتين كما يلي : $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\frac{1}{x-2}$

1) عين مجموعة تعريف $go\,f$ ثم احسب $(go\,f)(x)$

2) عين مجموعة تعريف الدالة $fo\,g$ ثم احسب $(fog)(x)$

الحل :

1) لكي تكون الدالة $go\,f$ معرفة يجب ان تكون الكتابة $(go\,f)(x)$ لها معنى اي : $x\in D_f$ و $f(x)\in D_g$

مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=IR$

مجموعة تعريف الدالة g هي : $D_g=IR-\{2\}$

$f(x)\in D_g$ يكافئ $f(x)\neq 2$ اي : $x^2+1\neq 2$ ومنه ينتج : $x^2\neq 1$

$x^2\neq 1$ يكافئ : $x\neq 1$ و $x\neq -1$

و بالتالي : $x\in IR-\{1,-1\}$ وعليه

$D_{go\,f}=(IR)\cap(IR-\{-1,1\})=IR-\{-1,1\}$

$(gof)(x)=g(f(x))= =\frac{1}{f(x)-2}=\frac{1}{x^2+1-2}=\frac{1}{x^2-1}$

2) لكي تكون الدالة $fo\,g$ معرفة يجب ان تكون الكتابة $(fog)(x)$ لها معنى اي : $x\in D_g$ و $g(x)\in D_f$

$g(x)\in D_f$ لان من اجل كل $x\in IR-\{2\}$ فان : $\frac{1}{x-2}\in IR$

وبتالي : $D_{fo\,g}=D_g\cap D_g=D_g$

$(fog)(x)=f(g(x)) = (g(x))^2+1 = \frac{1}{(x-2)^2}+1$

$=\frac{1+(x-2)^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2}$

ملاحظة

اذا كان y يرتبط بـ x بالدالة f $(x\mapsto y)$ و z يرتبط بـ y وفق الدالة g $(y\xrightarrow{g}z)$ فان z يرتبط بـ x وفق الدالة $go\,f$

ونكتب : $z=go\,f(x)$

$x\xrightarrow{f}y\xrightarrow{g}z$ ($go\,f$)

5. اتجاه تغير

1.5 اتجاه تغير مجموع دالتين :

مبرهنة :

مجموع دالتين متزايد تين تماما على المجال I هي دالة متزايدة تماما على I

مجموع دالتين متناقصتين تماما على المجال I هي دالة متناقصة تماما على I

الاثبات :

ليكن a و b عددين من I بحيث : $a<b$ ، اذا كانت f و g دالتين متزايدتين تماما على المجال I فان : $f(a)<f(b)$ و $g(a)<g(b)$ ، بجمع طرفي المتباينتين طرف الى طرف نجد : $g(a)+f(a)<g(b)+f(b)$ وهذا مما يدل على ان : $(f+g)$ دالة متزايدة تماما على I

- بنفس الطريقة نبين أنه إذا كانت f و g متناقصتين تماما على I فإن $f+g$ متناقصة تماما على I

مثال

الدالة f حيث : $f(x)=x^2$ متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ و الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\sqrt{x}$ متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ وبتالي الدالة $g+f$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.

2.5 اتجاه تغير دالة λf

f دالة معرفة على المجال I و λ عدد حقيقي غير معدوم.

λf هي دالة ترفق بكل $x\in I$ العدد الحقيقي $\lambda f(x)$ ونكتب : $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$

□ مبرهنة :

- اذا كان $0<\lambda$ فان الدالتين λf و f لها نفس اتجاه التغير في المجال I
- اذا كان $\lambda<0$ فان الدالتين λf و f لهما اتجاه تغير متعاكس

□ الاثبات :

1) في حالة : $0<\lambda$ و f دالة متزايدة تماما على I

ليكن u و v عددين من I بحيث : $u<v$.

بما ان الدالة f متزايدة تماما على I

فان : $f(u)<f(v)$ وبضرب طرفي المتباينة في العدد λ

ينتج : $\lambda f(u)<\lambda f(v)$ وهذا مما يدل على ان الدالة λf متزايدة تماما على I

2) في حالة : $\lambda<0$ و f دالة متزايدة تماما على I

بما ان الدالة f متزايدة تماما على المجال I فان : $f(u)<f(v)$

وبضرب طرفي المتباينة في العدد λ ينتج : $\lambda f(u)>\lambda f(v)$

وهذا مما يدل على ان الدالة λf متناقصة تماما على I.

3.5 اتجاه تغير دالة مركبة

□ مبرهنة :

f و g دالتين رتيبتين تماما ، D_f و D_g مجموعة تعريف f و g على الترتيب

وليكن I مجال جزئي من D_f و J مجال جزئي من D_g

بحيث من اجل كل : $x\in I$ فان : $f(x)\in J$

1) اذا كانت f و g دالتين لهما نفس اتجاه التغير فان الدالة $go\,f$ متزايدة تماما على المجال I

2) اذا كانت f و g دالتين لهما اتجاه تغير متعاكس فان الدالة $go\,f$ متناقصة تماما على المجال I

□ الاثبات :

1) نفرض ان الدالتين f و g متزايدتين تماما.

بما ان الدالة f متزايدة تماما على I فان من اجل كل عددين u و v بحيث : $u<v$

يكون لدينا : $f(u)<f(v)$ وبما ان الدالة g متزايدة تماما على J و $f(u)<f(v)$

فان : $g(f(u))<g(f(v))$ مما يدل على أن الدالة $go\,f$ متزايدة تماما على I .

- وبنفس الطريقة نثبت انه اذا كانت f و g متناقصتين على I و J على الترتيب فان الدالة $go\,f$ متزايدة تماما على I.

2) نفرض ان الدالة f متزايدة تماما على I و g دالة متناقصة تماما على J .

بما ان الدالة f متزايدة تماما على I فانه من اجل كل عددين حقيقين u و v بحيث : $u<v$ يكون لدينا : $f(u)<f(v)$.

وبما ان الدالة g متناقصة تماما على J فان من اجل $f(u)$ و $f(v)$ السابقتين يكون لدينا : $g(f(u))>g(f(v))$ ، و هذا مما يدل على ان الدالة $go\,f$ متناقصة تماما على I

- وبنفس الطريقة نثبت ان : $go\,f$ متناقصة تماما على I اذا كانت f متناقصة تماما على I و g متزايدة تماما على J.

تمرين تدريبي 1

لتكن f_1 و f_2 دالتين معرفتين كما يلي :

$f_1(x)=\frac{1}{2}x^2$ و $f_2(x)=-\frac{1}{2}x^2$ ، وليكن (γ_1) ، (γ_2) المنحنى البياني لهما على الترتيب في معلم متعامد ومتجانس ، ارسم (γ_1) ، (γ_2) .

✓ الحل :

الدالة f_1 تكتب على الشكل : $f_1(x)=\lambda x^2$

حيث : $\lambda=\frac{1}{2}$

وبما ان $0<\lambda$ فان اتجاه تغير الدالة f_1 هي نفسها اتجاه تغير الدالة $x\mapsto x^2$

وبالتالي المنحنى (γ_1) هو قطعا مكافئ مشدود نحو الاعلى

- الدالة f_2 تكتب على الشكل : $f_2(x)=\lambda x^2$

حيث : $\lambda=-\frac{1}{2}$ وبما ان $\lambda<0$ فان اتجاه تغير الدالة f_2 هي عكس اتجاه تغير الدالة $x\to x^2$

وبتالي المنحنى (γ_2) هو قطعا مكافئ مشدود نحو الاسفل (استعنا باتجاه تغير الدالة λf)

تمرين تدريبي ❷

(الدالة المركبة)

لتكن الدالة h المعرفة ب: $h(x)=(x+1)^2$. وليكن (γ) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) عين مجموعة تعريف الدالة h ثم بين ان الدالة h متزايدة تماما على المجال $[-1,+\infty[$

2) ليكن $t_{\vec{V}}$ انسحاب شعاعه $\vec{V}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ بين ان المنحنى (γ) هو صورة المنحنى (γ_1) بيان الدالة $x\mapsto x^2$ ثم ارسم (γ)

✓ الحل :

1) نرمز ب: f و g الى الدالتين المعرفتين بالعبارة $f(x)=x+1$ و $g(x)=x^2$ فيكون : $h=go\,f$

الدالة f معرفة على IR .

لحساب $g(f(x))$ يجب ان يكون : $x\in D_f$ و $f(x)\in D_g$

$x\in D_f$ معناه : $x\in IR$

$f(x)\in D_g$ معناه : $x\in IR$

اذن مجموعة تعريف الدالة h هي IR .

- بما ان f متزايدة تماما على المجال $[-1,+\infty[$ و $f(x)\in[0,+\infty[$ و g متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ فان الدالة $go\,f$ متزايدة تماما على $[-1,+\infty[$

اذن الدالة h متزايدة تماما على $[-1,+\infty[$.

2) لتكن $M(x,y)$ نقطة من (γ_1) و $M'(x',y')$ نقطة من (γ_2) حيث : (γ_2) صورة (γ_1) بالانسحاب $t_{\vec{V}}$

اذن : $M'=t_{\vec{V}}(M)$ اي : $\overrightarrow{MM'}=\vec{V}$

$\overrightarrow{MM'}=\vec{V}$ تعني $\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ ومنه ينتج : $\begin{cases}x'=x-1\\y'=y\end{cases}$

$y'=y=f(x)=f(x'+1)=(x'+1)^2$

ومنه نستنتج ان النقطة $M'(x',y')$ تنتمي الى المنحنى الممثل للدالة h وعليه (γ) صورة (γ_1) بالانسحاب $t_{\vec{V}}$



نتيجة

ان معرفتنا لإتجاه تغير كل من f و g لا يسمح لنا بمعرفة اتجاه تغير $f-g$ و $f\times g$ في الحالة العامة

مثال ❶

لتكن الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x$ ، $g(x)=x^2$

الدالتين f و g متزايدتين على المجال $[0,+\infty[$

هل الدالة $f-g$ متزايدة تماما او متناقصة تماما على $[0,+\infty[$ ؟

الدالة $f-g$ معرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي : $(g-f)(x)=x^2-x$

يمكنك اثبات ان الدالة $f-g$ متزايدة تماما على المجال : $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ و متناقصة تماما على المجال : $\left[0\,,\,\frac{1}{2}\right[$

ومنه نستنتج ان الدالة $f-g$ ليست متزايدة تماما ولا متناقصة تماما على $[0,+\infty[$

❻- كيفية التحصل على بيانات الدوال f_1 ، f_2 ، f_3 انطلاقا من بيان الدالة f

حيث : $f_1(x)=-f(x)$ ، $f_2(x)=|f(x)|$ ، $f_3(x)=f(-x)$

1.6 الدالة $x\xrightarrow{f_1}-f(x)$

مثال ◆

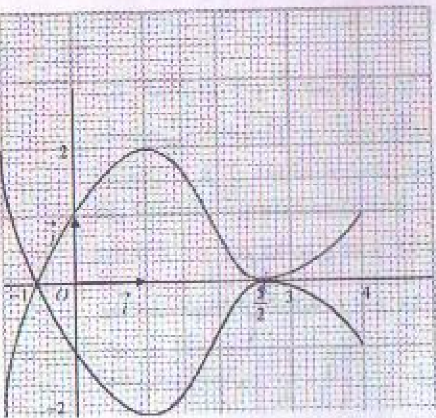
1) لتكن f دالة معرفة على المجال: $[-1\,,4]$ وبيانها (γ) كما هو موضح في الشكل المجاور

عين طريقة لتعليم نقطة $(x,\ f_1(x))$ من المنحنى (γ_1) بيان الدالة f_1 ثم استنتج التحويل النقطي الذي يسمح بالانتقال من (γ) الى (γ_1) .

2) استنتج جدول تغيرات f_1 ثم ارسم (γ_1)

✓ الحل :

1) لتكن $M(x , f(x))$ نقطة من المنحني (γ) و $M_1(x , f_1(x))$ نقطة من المنحني (γ_1) .



بما ان : $f_1(x) = -f(x)$ فان احداثيتي النقطة M_1 هي : $M_1(x , -f(x))$.

نلاحظ ان النقطتين M و M_1 لهما نفس الفاصلة وترتيبها متعاكس

اذن اذا كانت النقطة M تنتمي الى نصف المستوي العلوي المحدد بـ : (xx') فان النقطة M_1 تنتمي الى نصف المستوي السفلي المحدد بـ : (xx') والعكس صحيح ومنه نستنتج ان النقطة M_1 هي نظيرة النقطة M بالتناظر المحوري بالنسبة الى (xx') .

فمثلا نظيرة النقطة $M(0 , -2)$ هي النقطة $M_1(0 , 2)$

و نظيرة النقطة $A(1 , 2)$ من (γ) هي النقطة $A_1(1 , -2)$ من (γ_1) ،

و نظيرة النقطة $B\left(-\frac{1}{2} , 0\right)$ هي $B_1\left(-\frac{1}{2} , 0\right)$

2) جدول تغيرات الدالة f_1 :

x	-1		2		$\frac{5}{2}$		4
$f(x)$	-2	↗	2	↘	0	↗	1
$f_1(x)$	2	↘	-2	↗	0	↘	-1

2.6 الدالة $x \xrightarrow{f_2} |f(x)|$

مثال ◆

لتكن f دالة معرفة على المجال $[-3 , 6]$ و (γ) منحناها البياني كما هو موضح في الشكل المجاور .

1) عين طريقة لتعليم نقطة $(x , f_2(x))$ من المنحني (γ_2) الممثل للدالة f_2 في كل حالة من الحالات التالية :

$x \in [-3 , 0]$ ، $x \in [0 , 4]$ ، $x \in [4 , 6]$

2) عين جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج جدول تغيرات الدالة f_2 .

3) ارسم (γ_2) في نفس المعلم السابق .

✓ الحل :

1) ☐ **كيفية تعليم نقطة من (γ_2) لما $x \in [-3 , 0]$**

لتكن $M(x , f(x))$ نقطة من (γ) و $M_1(x , f_2(x))$ نقطة من (γ_2) .

بما ان $x \in [-3 , 0]$ فان : $f(x) < 0$ ومنه : $|f(x)| = -f(x)$ وبتالي احداثيتي النقطة M_1 هي : $M_1(x , -f(x))$.

نلاحظ ان النقطتين M و M_1 لهما نفس الفاصلة وترتيبهما متعاكس

اذن M_1 هي نظيرة M بالنسبة الى حامل محور الفواصل (xx') . وبما ان النقطة M تقع في نصف المستوي السفلي فان النقطة M_1 تقع في نصف المستوي العلوي .

فمثلا النقطة $A(-3 , 0)$ من (γ) نظيرتها $A_1(-3 , 0)$

والنقطة $B(-2 , -1)$ نظيرتها $B_1(-2 , 1)$

☐ **كيفية تعليم نقطة من (γ_2) لما $x \in [0 , 4]$**

لتكن $M(x , f(x))$ نقطة من (γ) و $M_1(x , f_2(x))$ نقطة من (γ_2)

بما ان $x \in [0 , 4]$ فان : $f(x) > 0$ ومنه : $|f(x)| = f(x)$ وبتالي احداثيتي النقطة M_1 هي $M_1(x , f(x))$

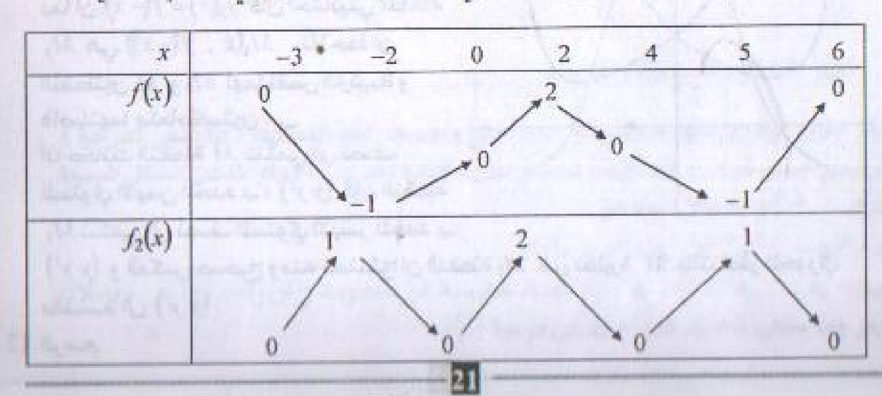
نلاحظ ان النقطتين M و M_1 لهما نفس الاحداثيات وبالتالي فهما منطبقتين وعليه المنحنى (γ_2) منطبق على (γ) في هذا المجال .

☐ **كيفية تعليم نقطة من (γ_2) لما $x \in [4 , 6]$**

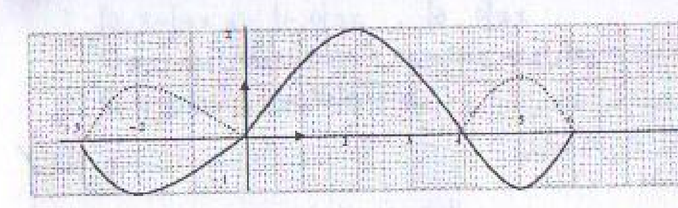
لتكن $M(x , f(x))$ نقطة من (γ) و $M_1(x , f_2(x))$ نقطة من (γ_2)

بما ان : $x \in [4 , 6]$ فان $f(x) < 0$ ومنه : $|f(x)| = -f(x)$ وبالتالي إحداثيتي النقطة M_1 هي : $M_1(x , -f(x))$

وطريقة تعليم M_1 تتم بنفس الكيفية التي علمنا بها النقطة M_1 في حالة $x \in [-3 , 0]$



x	-3		-2		0		2		4		5		6
$f(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	2	↘	0	↘	-1	↗	0
$f_2(x)$	0	↗	1	↘	0	↗	2	↘	0	↗	1	↘	0



على المجال $[-3 , 0]$ بيان الـدالة f_2 هو نظير بيان الدالة f بالتناظر بالنسبة الى $(x\ x')$

وعلى المجال $[0 , 4]$ بيان الدالة f_2 منطبق على بيان الدالة f وعلى المجال $[4 , 6]$ بيان الدالة f_2 هو نظير بيان الدالة f بالنسبة الى $(x\ x')$

3.6 الدالة $f_3 : x \xrightarrow{f_3} f(-x)$

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-3 , 3]$ و (γ) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس كما هو موضح في الشكل المجاور

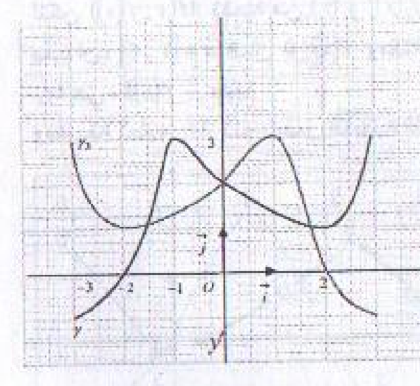
والتكن الدالة f_3 المعرفة بـ: $f_3(x)=f(-x)$

1) عين طريقة لتعليم النقطة $M(x , f(x))$ من المنحنى (γ_3) للدالة f_3 ثم استنتج التحويل النقطي الذي يسمح لنا بالانتقال من (γ) الى (γ_3)

2) ارسم (γ_3) في نفس المعلم .



الحل :



1) لتكن $M(x , f(x))$ نقطة من (γ) و $M_1(x , f_3(x))$ نقطة من المنحنى (γ_3)

بما ان $f_3(x)=f(-x)$ فان احداثيتي النقطة M_1 هي $M_1(x , f(-x))$ ، نلاحظ ان النقطتين M و M_1 لهما نفس الترتيبة و فاصلتهما متعاكستين .

اذا كانت النقطة M تنتمي الى نصف المستوي الايمن المحدد بـ : $(y\ y')$ فإن النقطة M_1 تنتمي الى نصف المستوي الايسر المحدد بـ: $(y\ y')$ و العكس صحيح ومنه نستنتج ان النقطة M_1 هي نظيرة M بالتناظر المحوري بالنسبة الى $(y\ y')$

2) الرسم

النقطة $A(-3,-1)$ نظيرتها بالنسبة الى $(y\ y')$ هي $A'(3,-1)$

النقطة $B(-1,3)$ نظيرتها بالنسبة الى $(y\ y')$ هي $B'(1,3)$

النقطة $C(2,1)$ نظيرتها بالنسبة الى $(y\ y')$ هي $C'(-2,1)$

ونكتب : $f(-3)=f(3)=1$ و $f(-1)=f(1)=3$ ، $f(2)=f(-2)=1$

7 . كثيرات الحدود

1.7 وحيد الحد :

a عدد حقيقي غير معدوم و n عدد طبيعي

الدالة $x \mapsto ax^n$ المعرفة على IR تسمى دالة وحيد الحد ذات العامل a والدرجة n

و يسمى العدد الحقيقي ax^n وحيد حد

مثال

1) $5x^2$, $\sqrt{2}x^3$, $5x$ وحيدات حد لمتغير حقيقي x معاملتها 5 , $\sqrt{2}$, 5 على التوالي ودرجاتها 2 , 3 , 1 على الترتيب

2) $\frac{1}{2}x^{-1}$, $\sqrt{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ليست وحيدات حد لمتغير حقيقي لان -1 ، $-\frac{1}{2}$ ليست اعداد طبيعية

2.7 كثير الحدود :

كثير الحدود لمتغير حقيقي x هو مجموع وحيدات الحد لمتغير حقيقي x

مثال

1) $p(x)=2x^2-x+x^3-1$ كثير حدود لمتغير حقيقي x

2) $Q(x)=\frac{1}{2}x^2-x^3+5x^4-1$ كثير حدود لمتغير حقيقي x

كثير الحدود المبسط والمرتب

$p(x)$ كثير حدود لمتغير حقيقي x ، بعد جمع وحيدات الحد المتشابهة (لها نفس الدرجة) وترتيبها حسب قوى x المتناقصة نحصل على كتابة اخرى لـ : $p(x)$ تدعى الشكل المبسط والمرتب لـ: $p(x)$ والشكل العام هو :

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x^1+a_0$$

حيث : $a_0 , a_1 , ..., a_{n-1} , a_n$ اعداد حقيقية غير معدومة في آن واحد وتدعى معاملات $p(x)$ واذا كان $a_n \neq 0$ فان n يدعى درجة $p(x)$

مثال

1) $p(x)=ax+b$ مع $a\neq 0$

$p(x)$ ثنائي حد درجته 1 و معاملاته b, a

2) $p(x)=ax^2+bx+c$ / $a\neq 0$

$p(x)$ ثلاثي حدود درجته 2 و معاملاته: c, b, a

3) $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ / $a\neq 0$

$p(x)$ كثير حدود درجته 3 و معاملاته: d, c, b, a

الدالة كثير الحدود

$p(x)$ كثير حدود لمتغير حقيقي x

الدالة f التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الحقيقي $p(x)$ تسمى دالة كثير حدود ونكتب:

$f: x\mapsto p(x)$

مثال

الدوال: f_1، f_2، f_3 المعرفة بـ:

$f_1: x\mapsto 5x+4x+1$, $f_2: x\mapsto 2x+3$, $f_3: x\mapsto \frac{1}{2}x^3+5x^2+2x+1$

هي دوال كثيرات حدود

3.7 مجموع وجداء كثيرات حدود:

p و Q كثيري حدود لمتغير حقيقي x.

مجموع كثيري الحدود p و Q هو كثير الحدود $p+Q$ درجته اقل او تساوي من درجة p او Q

جداء كثيري الحدود p و Q هو كثير الحدود $p\times Q$ درجته هي مجموع درجتي Q و p $p\times Q$

ملاحظة

قسمة دالتين كثير حدود ليس بالضرورة ان تكون دالة كثير حدود ونقول في هذه الحالة ان الدالة الناتجة هي دالة ناطقة

مثال

1) Q, P, L كثيرات حدود معرفة كما يلي:

$P(x)=x^2-1$, $Q(x)=2x+2$, $L(x)=x+3$

درجة $P+Q$ تساوي 2 ودرجة $P\times Q$ تساوي 3

2) من اجل كل $x\in IR-\{-1\}$: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x-1}{2}$

اذن قسمة الدالة: $x\mapsto P(x)$ على الدالة $x\mapsto Q(x)$ هي دالة f المعرفة بـ:

$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x-1}{2}$ اذن الدالة الناتجة هي دالة كثير حدود

3) من اجل كل $x\in IR$ ، $\frac{P(x)}{L(x)}=\frac{x^2-1}{x+2}$

اذن قسمة الدالة $x\mapsto P(x)$ على الدالة $x\mapsto L(x)$ هي دالة f المعرفة على: $IR-\{-2\}$

بالشكل التالي: $f(x)=\frac{p(x)}{l(x)}=\frac{x^2-1}{x+2}$ اذن الدالة الناتجة ليست دالة كثير حدود.

4.7 تساوي كثيري حدود:

p و Q كثيري حدود لمتغير حقيقي x

القول ان: $P=Q$ يعني أن من اجل كل عدد حقيقي x يكون: $P(x)=Q(x)$

حالة كثير حدود P و Q لهما نفس الدرجة

نضع: $P(x)=ax+b$ و $Q(x)=a'x+b'$

لنبين ان: $P=Q$ اذا وفقط اذا كان: $a=a'$ و $b=b'$

- اذا كان $a=a'$ و $b=b'$ فان من اجل كل $x\in IR$: $P(x)=Q(x)$ ومنه $P=Q$
- اذا كان $P=Q$: يعني ان من اجل كل $x\in IR$ $P(x)=Q(x)$

من اجل $x=0$ نجد: $P(0)=Q(0)$ اي: $b=b'$

من اجل $x=1$ نجد: $P(1)=Q(1)$ اي: $a+b=a'+b'$ و بما ان $b=b'$ فان: $a=a'$

نتيجة

يتساوى كثيري حدود من الدرجة الاولى اذا تساوة معاملاتهما على التوالي

حالة كثير حدود P و Q مختلفين في الدرجة

ليكن: $P(x)=ax+b$ و $Q(x)=a'x^2+b'$ حيث: $a\neq 0$ و $a'\neq 0$

لنبين ان كثيري الحدود p و Q غير متساويين

نفرض ان: p و Q متساويين ينتج عنه $P(0)=Q(0)$ و $P(1)=Q(1)$ و $P(-1)=Q(-1)$

$P(0)=Q(0)$ تعني $b=b'$

$P(1)=Q(1)$ تعني $a+b=a'+b'$ اي $a=a'$

$P(-1)=Q(-1)$ تعني $a'+b'=-a+b$ وهذا خطا كون: $a'+b'=a+b$

اذن: p و Q غير متساويين.

نتيجة

تتساوى دالتين كثير حدود اذا وفقط اذا كان لهما نفس الدرجة ووحيدات حدودهما ذات نفس الدرجة على التوالي لها نفس العاملات

مثال

$P(x)=2x^2-3x-1$

$Q(x)=(a+1)x^2+bx-1$

اذا كان $P=Q$ فان : $a=1$ و $b=-3$

تمرين تدريبي

$p(x)$ كثير حدود لمتغير حقيقي x معرف كما يلي : $P(x)=x^3+3x^2-5x-10$

اوجد كثير حدود من الدرجة الثانية Q بحيث من اجل كل $x\in IR$ ؛

$P(x)=(x-2)Q(x)$

الحل :

بما ان Q درجته 2 فانه من اجل كل $x\in IR$ ، $Q(x)=ax^2+bx+c$ حيث : $a\neq 0$

اذن من اجل $x\in IR$: $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$

$P(x)=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

بالمطابقة مع العبارة المعطاة لـ p نجد : $a=1$ و $b-2a=3$ و $c-2b=-5$ و $-2c=10$

وبعد الحساب نجد : $a=1$, $b=5$, $c=5$

x^2+5x+5

8. تغير المعلم

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

وليكن (γ) المنحنى ذوا المعادلة $y=f(x)$ في هذا المعلم .

نبحث عن معادلة (γ) في معلم $(A,\vec{i},\vec{j})$ حيث

النقطة A احداثيتها (a,b) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

اذن : $\vec{OA}=a\vec{i}+b\vec{j}$

لتكن M نقطة من المستوي احداثياتها بالنسبة الى $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، (x,y) وبالنسبة الى المعلم $(A,\vec{i},\vec{j})$ هي (X,Y) .

و هذا يعني : $\vec{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{AM}=X\vec{i}+Y\vec{j}$

و بتطبيق علاقة شال نجد : $\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}$

و منه نستنتج : $\begin{cases}x=X+a\\y=Y+b\end{cases}$ تسمى هذه الجملة بعلاقة تغير المعلم

ملاحظة

ان تغير المعلم يسمح لنا باعطاء معادلة المنحنى في المعلم $(A,\vec{i},\vec{j})$

نرمز لها بـ: $Y=g(X)$

- اذا كانت الدالة g زوجية فان $(A,\vec{j})$ هو محور تناظر للمنحنى (γ)
- اذا كانت الدالة g فردية فان النقطة A هي مركز تناظر لـ (γ)

تمرين تدريبي

لتكن الدالة f المعرفة على $R-\{-1\}$ بالعبارة التالية : $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$

وليكن (γ) المنحنى البياني لها في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ولتكن A نقطة من المستوي احداثياتها $(-1\ ,\ 1)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ولتكن M نقطة من (γ) احداثيتها (x,y) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) اوجد : (X,Y) احداثيتا النقطة M في المعلم $(A,\vec{i},\vec{j})$ ثم اوجد معادلة (γ) في المعلم $(A,\vec{i},\vec{j})$

2) نضع $g(X)=Y$ ادرس شفعية الدالة g ماذا تستنتج ؟

الحل :

1) بما ان (x,y) احداثيات M في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ فان : $\vec{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$

وبما ان : (X,Y) احداثيات M في المعلم $(A,\vec{i},\vec{j})$ فان : $\vec{AM}=X\vec{i}+Y\vec{j}$

وبتطبيق علاقة شال نجد :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$$

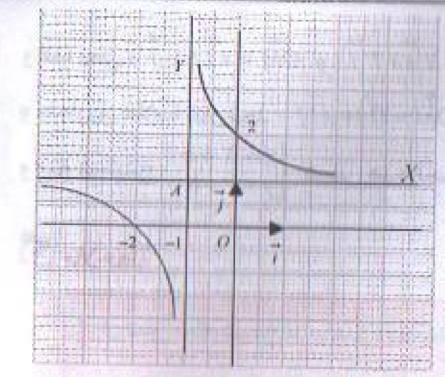
ومن هذه العلاقة نستنتج : $\begin{cases} x = X-1 \\ y = Y+1 \end{cases}$

من المساواة : $y = Y+1$ نجد : $Y = y-1$ اي :

$$Y = f(X)-1$$

$$Y = f(X-1)-1 = \frac{X-1+2}{X-1+1}-1$$

$$= \frac{X+1}{X}-1 = \frac{1}{X}$$



اذن : $Y=\frac{1}{X}$ هي معادلة المنحى (γ) في المعلم $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$

2) $g(X)=\frac{1}{X}$ ، الدالة g هي الدالة المطلوبة فهي اذن دالة فردية وبالتالي نستنتج ان المنحى (γ) يقبل النقطة A كمركز تناظر له .

9. محور التناظر ومركز التناظر

في الفقرة 8 استعملنا تغير المعلم للاثبات ان المنحى (γ) يقبل محور التناظر او مركز تناظر و في هذه الفقرة نتعرف على طريقة اخرى التي نستعمل فيها خصائص التناظر

9.1 محور التناظر

مثال 1

في معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ، (γ) المنحى ذوا المعادلة $y=f(x)$ و (Δ) مستقيم ذوا المعادلة $x=a$.

القول ان (Δ) محور تناظر المنحى (γ) يعني ان نظيرة اي نقطة M من (γ) بالنسبة الى (Δ) هي نقطة كذلك من (γ) .

1) لتكن $M(x, y)$ نقطة كيفية من المستوي ولتكن $M'(x', y')$ نظيرتها بالنسبة الى (Δ)

احسب :

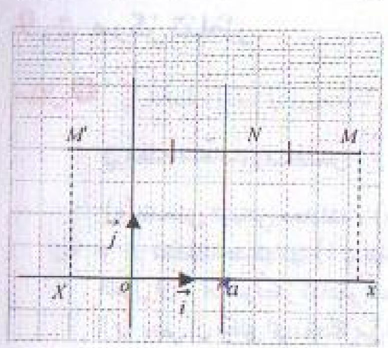
x', y' بدلالة x و y

2) بين صحة التكافؤ التالي : القول ان المستقيم (Δ) ذوا المعادلة $x=a$ محور تناظر لـ (γ) يكافئ القول ان : من اجل كل $x=a+h$ من D_f فإن : $a-h$ من D_f و $f(a+h)=f(a-h)$

✓ **الحل :**

1) تعين x', y' بدلالة x و y

بما ان M' نظيرة M بالنسبة الى (Δ) فان (Δ) محور القطعة المستقيمة $[MM']$ يقطعها في النقطة H وعليه ينتج : $\vec{MM'} = 2\vec{MH}$ وبما ان H نقطة من (Δ) وتقع على استقامة واحدة مع M و M' فان : $H(a, y)$ و $y=y'$.



من العلاقة : $\vec{MM'} = 2\vec{MH}$ ينتج:

$\begin{cases} x'-x = 2(a-x) \\ y'-y = 0 \end{cases}$ وبالتبسيط نجد :

$$\begin{cases} x' = 2a-x \\ y' = y \end{cases}$$

2) اثبات ان :

$x=a$ محور تناظر لـ (γ) يكافئ من اجل كل $x=a+h$ من D_f فان $a-h$ من D_f و $f(a+h)=f(a-h)$

- اذا كان المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر لـ (γ) و M' نظيرة M بالنسبة الى (Δ) فإن : $x'=2a-x$ و $y'=y$

من اجل : $x=a+h$ فان : $x'=2a-(a+h)$ اي : $x'=a-h$.

$y'=y$ تعني : $f(x')=f(x)$ اي : $f(a-h)=f(a+h)$

- لتكن : M و M' نقطتين من (γ) فاصلتهما على الترتيب $a+h$ و $a-h$

وبما ان $f(a+h)=f(a-h)$ فان المستقيم (Δ) ذوا المعادلة $x=a$ هو محور تناظر لـ (γ)

مثال 2

لتكن f دالة معرفة كما يلي : $x \mapsto \frac{1}{2}x^2+3x$ ، اثبت ان المستقيم ذوا المعادلة $x=-3$ محور تناظر لبيان الدالة f

✓ **الحل :**

لاثبات ان المستقيم ذوا المعادلة $x=-3$ محور تناظر لبيان الدالة f يجب ان نثبت : من اجل كل : $x=-3+h$ من IR فان : $-3-h$ من IR و $f(-3+h)=f(-3-h)$

$$f(-3+h)=\frac{1}{2}\left(-3+h^2\right)+3(-3+h)$$

$$=\frac{1}{2}\left(9-6h+h^2\right)-9+3h = \frac{9}{2}-3h+\frac{1}{2}h^2-9+3h = \frac{1}{2}h^2-\frac{9}{2}$$

$$f(-3-h)=\frac{1}{2}(-3-h)^2+3(-3-h)$$

$$=\frac{1}{2}(9+6h+h^2)-9-3h=\frac{1}{2}h^2+3h+\frac{9}{2}-9-3h=\frac{1}{2}h^2-\frac{9}{2}$$

منه : $f(-3-h)=f(-3+h)$ وبالتالي : المستقيم $x=-3$ محور تناظر لـ (γ)

2.9 مركز تناظر

مثال 1

في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

(γ) المنحنى البياني معادلته : $y=f(x)$

و A نقطة احداثياتها $(a\ ,\ b)$.

القول ان : A مركز تناظر للمنحنى (γ) يعني ان نظير اي نقطة من (γ) بالنسبة الى النقطة A هي نقطة ايضا من (γ) .

1) لتكن $M(x\ ,y)$ نقطة كيفية من (γ) و $M(x'\ ,y')$ نظيرها بالنسبة الى النقطة A بين انه اذا كان : $x=a+h$ فان $x'=a-h$ و $y+y'=2b$

2) بين صحة التكافؤ التالي : القول ان النقطة A احداثياتها (a,b) مركز تناظر لـ : (γ) يكافئ القول ان من اجل كل : $x=a+h$ من D_f فان $a-h$ من D_f و $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$

الحل :

1) بما ان النقطتين M و M' متناظرتين بالنسبة الى A فان A منتصف القطعة المستقيمة $[MM']$ ومنه ينتج ان : $a=\frac{x+x'}{2}$ و $b=\frac{y+y'}{2}$ حيث : $y=f(x)$ و $y'=f(x')$

من اجل : $x=a+h$ نجد ان ، $x'=2a-x$ اي ، $x'=a-h$

2) لتكن A مركز تناظر للمنحني (γ) ، لتكن النقطتين M و M' متناظرتين بالنسبة الى A لدينا : $a=\frac{x+x'}{2}$ و $b=\frac{y+y'}{2}$.

من اجل $x=a+h$ نجد $x'=a-h$ بالتعويض x و x' في المساواة $\frac{y+y'}{2}=b$

نجد ، $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$

وبالعكس إذا كان $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$ فإن النقطتين $M\,(a+h\ ,\ f(a+h))$ و $M'\,(a-h\ ,\ f(a-h))$ متناظرتين بالنسبة إلى النقطة $A\,(a,\ b)$

مثال 2

f دالة معرفة كما يلي : $x\mapsto\frac{-x+2}{2x-1}$

بين ان النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحى (γ) الممثل للدالة f

الحل :

لاثبات ان النقطة A مركز تناظر لـ : (γ) يجب ان نثبت : من اجل كل $x=\frac{1}{2}+h$ من D_f فان : $\frac{1}{2}-h$ من D_f و $\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)+f\left(\frac{1}{2}-h\right)}{2}=-\frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}+h\right)=\frac{-\left(\frac{1}{2}+h\right)+2}{2\left(\frac{1}{2}+h\right)-1}=\frac{\frac{3}{2}-h}{2h}\quad,\quad f\left(\frac{1}{2}-h\right)=\frac{\frac{3}{2}+h}{-2h}$$

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)+f\left(\frac{1}{2}-h\right)}{2}=\frac{\frac{\frac{3}{2}-h}{2h}+\frac{\frac{3}{2}+h}{-2h}}{2}=\frac{\frac{-3}{2}+h+\frac{3}{2}+h}{2h}=\frac{2h}{4h}=\frac{1}{-2}$$

اذن : $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ (γ)

تطبيقات نموذجية

تطبيق . 1 : انتماء نقطة الى بيان دالة

f دالة و (γ) منحناها البياني في معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و $M(x,y)$ من المستوي

هل النقطة M تنتمي الى المنحى (γ) في كل حالة من الحالات التالية

1) $f(x)=2x^2-3x+1$ ، $M(1,0)$

2) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-1}$ ، $M(3,2)$.

✓ الحل :

لكي تنتمي النقطة $A(a,b)$ الى (γ) يجب ان يكون $a\in D_f$ و $f(a)=b$

1) $D_f=IR$ و $1\in D_f$ و $f(1)=2\times1^2-3\times1+1=0$ منه النقطة $M(1,0)$ تنتمي الى (γ)

2) $D_f=IR-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ و $3\in D_f$ و $f(3)=\dfrac{4}{3}$ ومنه النقطة $M(3,2)$ لا تنتمي الى (γ)

تطبيق . 2 : تعيين إحداثيات نقطة

لتكن f دالة منحناها البياني (γ) في معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و $M(x,y)$ نقطة

من (γ) عين احداثيتي النقطة M في كل حالة من الحالات التالية

1) $f(x)=x^2+3x$ ، $M(1,y)$

2) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ ، $M(x,3)$

✓ الحل :

لكي تكون النقطة $M(x,y)$ تنتمي الى (γ) يجب ان يكون : $x\in D_f$ و $f(x)=y$

1) $D_f=IR$ و $1\in IR$ و $f(1)=4$ منه $y=4$ اذن : $(1,4)$ هما احداثيتي النقطة M

2) $D_f=IR-\{-2\}$ منه العدد x ان وجد فهو من المجموعة D_f

$M(x,3)$ تنتمي الى (γ) يعني $f(x)=3$

$f(x)=3$ تكافئ : $\dfrac{2x-1}{x+2}=3$ تكافئ $2x-1=3x+6$ و $x\neq-2$ تكافئ : $x=-7$

لاحظ ان : $-7\in D_f$ ومنه احداثيتي M هي $(-7,3)$

تطبيق . 3 : تعيين مجموعة تعريف دوال مختلفة

عين مجموعة تعريف كل من الدوال التالية :

$f(x)=\dfrac{4x}{(x-1)^2}$ ، $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$ ، $h(x)=\sqrt{x^2-1}$ ، $k(x)=\dfrac{2}{\sqrt{-x}}$ ،

$L(x)=\sqrt{2x-1}$

✓ الحل :

1) تعيين مجموعة تعريف الدالة f

مجموعة تعريف f هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث $(x-1)^2\neq0$

$(x-1)^2\neq0$ تكافئ : $(x-1)\neq0$ تكافئ : $x\neq1$

بالتالي مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f=IR-\{1\}$ اي : $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

2) تعيين مجموعة تعريف الدالة g

مجموعة تعريف الدالة g هي مجموعة الاعداد لحقيقية x بحيث : $x^2+x\neq0$

$x^2+x=0$ تكافئ $x(x+1)=0$

$x(x+1)=0$ تكافئ : $x=0$ او $x=-1$ ومنه مجموعة تعريف الدالة g هي :

$D_g=IR-\{0,-1\}$ اي : $D_g=]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$

3) تعيين مجموعة تعريف الدالة h

مجموعة تعريف الدالة h هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث : $x^2-1\geq0$

لدينا : $x^2-1=(x-1)(x+1)$ ، لحل المتراجحة $x^2-1\geq0$ نعين اشارة الجداء $(x-1)(x+1)$

والجدول التالي يلخص اشارة (x^2-1)

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x-1$	-		-	0	+
$x+1$	-	0	+		+
x^2-1	+	0	-	0	+

اذن : $x^2-1\geq 0$ اذا وفقط اذا كان : $x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$
ومنه مجموعة تعريف الدالة h هي : $D_h=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.

4) تعيين مجموعة تعريف الدالة k

مجموعة تعريف الدالة k هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث : $-x\geq 0$ و $\sqrt{-x}\neq 0$

$-x\geq 0$ اذا وفقط اذا $x\leq 0$

$\sqrt{-x}\neq 0$ اذا وفقط اذا $-x\neq 0$ اي : $x\neq 0$

اذن : $\left.\begin{matrix}-x\geq 0\\ \sqrt{-x}\neq 0\end{matrix}\right\}$ تكافئ $x<0$

ومنه مجموعة تعريف الدالة k هي : $D_k=]-\infty,0[$

5) مجموعة تعريف الدالة L

مجموعة تعريف الدالة L هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث : $2x-1\geq 0$

$2x-1\geq 0$ تكافئ $2x\geq 1$ وبقسمة طرفي المتباينة $2x\geq 1$ على 2 نجد ، $x\geq \frac{1}{2}$ ومنه

مجموعة تعريف الدالة L هي : $D_l=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

تطبيق . 4 : العمليات على الدوال - مجموعة تعريف

لتكن f و g دالتان معرفتان كما يلي :

$f(x)=\frac{3x-1}{-x+2}$ ، $g(x)=\frac{2x+3}{1+x}$

1) ما هي مجموعة تعريف كل من f و g

2) ما هي مجموعة تعريف كل من : $3f-g$ و $f\times g$

ثم احسب : $(3f-g)(x)$ و $(f\times g)(x)$

✓ الحل :

1) □ تعيين مجموعة تعريف الدالة f

مجموعة تعريف الدالة f هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث: $-x+2\neq 0$.

$-x+2=0$ تكافئ $x=2$ ومنه $D_f=IR-\{2\}$

□ تعيين مجموعة تعريف الدالة g

مجموعة تعريف الدالة g هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث : $1+x\neq 0$

$1+x=0$ تكافئ $x=-1$ ومنه : $D_g=IR-\{-1\}$

2) □ تعيين مجموعة تعريف الدالة $3f-g$

مجموعة تعريف الدالة $3f-g$ هي : $D_f\cap D_g$

$$D_f\cap D_g=(IR-\{2\})\cap(IR-\{-1\})$$
$$=IR-\{2,-1\}$$
$$=]-\infty,-1[\cup]-1,2[\cup]2,+\infty[$$

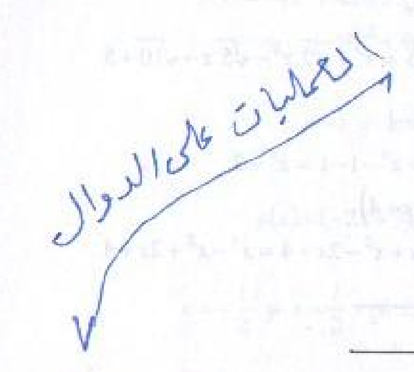
مجموعة تعريف الدالة $f\times g$ هي $D_f\cap D_g$

3) □ حساب $(3f-g)(x)$:

$$(3f-g)(x)=3f(x)-g(x)$$
$$=3\frac{3x-1}{-x+2}-\frac{2x+3}{1+x}$$
$$=\frac{3(3x-1)(1+x)-(2x+3)(-x+2)}{(-x+2)(1+x)}$$
$$=\frac{11x^2+5x-9}{(-x+2)(1+x)}$$

□ حساب $(f\times g)(x)$:

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$
$$=\frac{3x-1}{-x+2}\times\frac{2x+3}{1+x}$$
$$=\frac{(3x-1)(2x+3)}{(-x+2)(1+x)}=\frac{6x^2+x-3}{(-x+2)(1+x)}$$



تطبيق . 5 : التعرف على الدوال كثير حدود – النشر والترتيب

حدد في كل حالة من الحالات التالية ان كانت الدوال المعطاة دوال كثير الحدود

$h(x)=2x^3+2$ ، $k(x)=\frac{x^2+1}{3}+\frac{1}{x+1}$ ، $L(x)=x+\sqrt{x+3}$

$f(x)=x^3-5x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}$ ، $g(x)=x^2(x+2)$ ،

2) في كل حالة من الحالات التالية انشر ثم رتب حسب القوى المتناقصة كثيرات الحدود التالية

$A(x)=(2x+3)^2-2(x-2)$ ، $B(x)=(x+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{5})+5$

$C(x)=(x^2+1)(x^2-1)-1$ ، $D(x)=(x+1)(x^2-2x+4)$

✓ الحل :

1) - الدالة f ليست دالة كثير حدود لأن ، $\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$ و $-\frac{1}{2}\notin N$

- الدالة g هي دالة كثير حدود لان بعد التفكيك والتبسيط نجد : $g(x)=x^3+2x^2$ و قوى وحيدات الحد المشكلة لـ : $g(x)$ هي اعداد طبيعية
- الدالة h هي دالة كثير حدود لان قوى وحيدات الحد مشكلة لـ : $h(x)$ اعداد طبيعية
- الدالة k ليست دالة كثير حدود لان الحد $\frac{1}{x+1}$ تكتب على الشكل $(x+1)^{-1}$ و $-1\notin N$
- الدالة L ليست كثير حدود لان : $\sqrt{x+3}$ تكتب على الشكل : $(x+3)^{\frac{1}{2}}$ و $\frac{1}{2}\notin N$

2)
$$A(x)=(2x+3)^2-2(x-2)$$
$$=4x^2+12x+9-2x+4=4x^2+10x+13$$

$$B(x)=(x+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{5})+5$$
$$=x^3-\sqrt{5}x+\sqrt{2}\,x^2-\sqrt{10}+5=x^3+\sqrt{2}\,x^2-\sqrt{5}\,x-\sqrt{10}+5$$

$$C(x)=(x^2+1)(x^2-1)-1$$
$$=(x^2)^2-1^2-1=x^4-1-1=x^4-2$$

$$D(x)=(x+1)(x^2-2x+4)$$
$$=x^3-2x^2+4x+x^2-2x+4=x^3-x^2+2x+4$$

تطبيق 6 : إختيار الصيغة الانسب لحل معادلات

ليكن p كثير حدود معرف كما يلي : $p(x)=4-(2x-1)^2$

1) انشر ثم حلل الى جداء عوامل كثير الحدود p

2) من بين الكتابات المختلفة لـ : p عين الكتابات الملائمة للاجابة عن الاسئلة التالية :

ا) احسب $p(0)$

ب) احسب $p(-2)$

ج) ما هي سابقة العدد 3 بالدالة كثير الحدود p

د) حل المعادلة $P(x)=0$

هـ) حل المعادلة $p(x)=-4x^2$

✓ الحل :

1) □ نشر $p(x)$:

$$p(x)=4-(2x-1)^2$$
$$=4-(4x^2-4x+1)=4-4x^2+4x-1=-4x^2+4x+3$$

□ تحليل $p(x)$

$$p(x)=2^2-(2x-1)^2$$
$$=[2-(2x-1)][2+(2x-1)]=(2-2x+1)(2+2x-1)=(-2x+3)(2x+1)$$

2) ا) الكتابة الملائمة لحساب $p(0)$ هي :

$p(x)=-4x^2+4x+3$ وعليه يكون : $p(0)=3$

ب) الكتابة الملائمة لحساب $p(-2)$ هي :

$p(x)=(-2x+3)(2x+1)$ وعليه يكون $p(-2)=7\times(-3)=-21$

ج) الكتابة الملائمة لحساب سابقة العدد 3 بالدالة p هي $p(x)=-4x^2+4x+3$

$p(x)=3$ تكافئ : $-4x^2+4x+3=3$ تكافئ : $-4x^2+4x=0$

$-4x^2+4x=0$ تكافئ $-4x(x+1)=0$

$-4x(x+1)=0$ تكافئ $-4x=0$ او $x+1=0$ اي : $x=0$ او $x=-1$

ومنه العدد 3 له سابقتين هما -1 و 0

د) الكتابة الملائمة لحل المعادلة $p(x)=0$ هي : $p(x)=(-2x+3)(2x+1)$

$p(x)=0$ تكافئ $(-2x+1)(2x+1)=0$

$(-2x+1)(2x+1)=0$ تكافئ $-2x+1=0$ او $2x+1=0$ اي : $x=\frac{1}{2}$ او $x=-\frac{1}{2}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $p(x)=0$ هي $\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$

هـ) الكتابة الملائمة لحل المعادلة $p(x)=-4x^2$ هي : $p(x)=-4x^2+4x+3$

$p(x)=-4x^2$ تكافئ $-4x^2+4x+3=-4x^2$ ومنه $4x+3=0$ اي : $x=-\frac{3}{4}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $p(x)=-4x^2$ هي : $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

تطبيق 7 : تحليل عبارة إلى جداء عوامل

انشر العبارتين $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$ و $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

ثم استنتج تحليل العبارة $x^{10}-1$

✓ الحل :

$$(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=x^5-x^4+x^3-x^2+x+x^4-x^3+x^2-x+1$$

$=x^5+1$

$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5+x^4+x^3+x^2+x-x^4-x^3-x^2-x-1$

$=x^5-1$

□ إستنتاج تحليل العبارة $x^{10}-1$:

$$x^{10}-1=(x^5)^2-1=(x^5-1)(x^5+1)$$
$$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$
$$=(x^2-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

تطبيق ـ 8: تعيين مجموعة تعريف دالة مركبة وتعيين عبارتها

- احسب $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ بعد تعين مجموعة تعريف الدوال f ، g ، fog ، gof في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=x+1$ ، $g(x)=-x+5$
2) $f(x)=x^2$ ، $g(x)=3x-1$
3) $f(x)=\frac{1}{(x+1)}$ ، $g(x)=x+3$
4) $f(x)=2x+1$ ، $g(x)=\sin 3x$
5) $f(x)=\sqrt{x+2}$ ، $g(x)=x^2+1$

✓ الحل :

1) $D_f=D_g=IR=]-\infty,+\infty[$

- مجموعة تعريف gof هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث : $x\in D_f$ و $f(x)\in D_g$

$x\in D_f$ تكافئ $x\in IR$ ، ومن اجل $x\in IR$ يكون $f(x)\in Dg$

ومنه مجموعة تعريف gof هي : IR

- مجموعة تعريف gof هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث: $x\in D_g$ و $g(x)\in D_f$

$x\in D_g$ تكافئ $x\in IR$ ومن أجل كل $x\in IR$: $g(x)\in D_f$

إذن مجموعة تعريف الدالة gof هي IR

$$(gof)(x)=g(f(x))=-f(x)+5=-(x+1)+5=-x+4$$
$$(fog)(x)=f(g(x))=g(x)+1=-x+5+1=-x+6$$

2) $D_f=IR$ و $D_g=IR$

- مجموعة تعريف fog :

- مجموعة تعريف fog هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث : $x\in D_g$ و $g(x)\in D_f$

$x\in D_g$ تكافئ $x\in IR$

$g(x)\in D_f$ تكافئ $(3x-1)\in IR$

من اجل كل x من D_g يكون : $3x-1\in IR$ ومنه مجموعة تعريف الدالة gof هي : IR

بنفس الكيفية نبين أن مجموعة تعريف الدالة gof هي : IR

$$(fog)(x)=f(g(x))=[g(x)]^2=(3x-1)^2$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=3f(x)-1=3x^2-1$$

3) $D_f=IR-\{-1\}$ و $D_g=IR$

- مجموعة تعريف الدالة gof هي الاعداد الحقيقية x بحيث : $x\in D_f$ $f(x)\in D_g$

من اجل كل عدد حقيقي x من D_f يكون $f(x)\in IR$ ومنه مجموعة تعريف gof هي:

$D_f=IR-\{-1\}$

- مجموعة تعريف الدالة fog هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث : $x\in D_g$ و

$g(x)\in D_f$

$g(x)\in D_f$ تكافئ $g(x)\neq -1$

$g(x)\neq -1$ تكافئ $x+3\neq -1$ ومنه $x\neq -4$

($x\in D_g$ و $g(x)\in D_f$) تكافئ $x\in D_g$ و $x\neq -4$

ومنه مجوعة نعريف الدالة fog هي : $IR-\{-4\}$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{1}{g(x)+1}=\frac{1}{x+4}$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=f(x)+3=\frac{1}{x+1}+3$$

4) $D_f=IR$ ، $D_g=IR$

- مجموعة تعريف الدالة fog هي مجموعة الاعداد الحقيقية x

بحيث : $(x\in D_g)$ و $g(x)\in D_f$

$x\in D_g$ تكافئ $x\in IR$ و من اجل كل $x\in IR$ ، $g(x)\in IR$

ومنه مجموعة تعريف الدالة fog هي IR

- مجموعة تعريف الدالة gof

مجموعة تعريف الدالة gof هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث $x\in D_f$ و

$f(x)\in Dg$

$x\in D_f$ تكافئ : $x\in IR$ ومن اجل كل عدد حقيقي x من D_f يكون $f(x)\in D_g$ ومنه

مجموعة تعريف الدالة gof هي IR

$$(fog)(x)=2g(x)+1=2\sin 3x+1$$
$$gof(x)=g(f(x))=\sin 3f(x)=\sin(6x+3)$$

5) $D_f=[-2,+\infty[$ و $D_g=IR$

- مجموعة تعريف الدالة fog هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث : $x\in D_g$ و $g(x)\in D_f$

$g(x)\in D_f$ تكافئ : $x^2+1\ge -2$

$x^2+1\ge -2$ تكافئ : $x^2\ge -3$

ومن اجل كل عدد حقيقي $x\in D_g$ يكون : $x^2\ge -3$ وبالتالي مجموعة تعريف الدالة fog هي : $[-2,+\infty[$

- مجموعة تعريف الدالة gof هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث : $x\in D_f$ و $f(x)\in D_g$

من اجل كل $x\in D_f$ يكون دوما $f(x)\in D_g$ ، وبالتالي مجموعة تعريف الدالة gof هي : D_f

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)+2}=\sqrt{x^2+3}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=(f(x))^2+1=x+2+1=x+3$$

تطبيق . 9 : اتجاه تغير مجموع دالتين

1) لتكن الدالتين f و g المعرفتين على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=3x+2$ و $g(x)=2x^2$

لماذا الدالة $f+g$ متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$

2) لتكن الدالة h المعرفة بـ : $h(x)=\frac{1}{x}+3|x|$

بين لماذا الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty,0[$

3) لتكن الدالة K المعرفة كما يلي : $K(x)=-x^2-\sqrt{x}$

بين لماذا الدالة K متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

الحل :

1) الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ و الدالة g متزايدة على المجال $]0,+\infty[$

وبما ان مجموع دالتين متزايدة هي دالة متزايدة فان الدالة $f+g$ متزايدة على $]0,+\infty[$

2) اذا كان : $x\in]-\infty,0[$ ، يكون : $h(x)=\frac{1}{x}-3x$

الدلة h عبارة عن مجموع الدالتين $x\xrightarrow{h_1}\frac{1}{x}$ و $x\xrightarrow{h_2}-3x$ و h_1 و h_2 المتناقصتين تماما على المجال $]-\infty,0[$ بالتالي h متناقصة

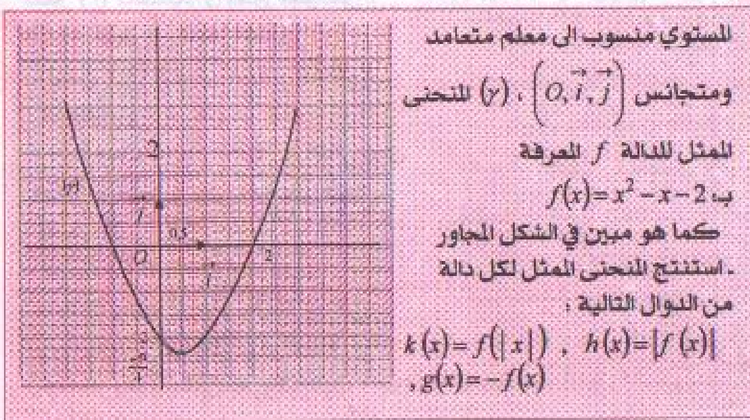
3) الدالة K هي عبارة عن مجموع الدالتين $x\xrightarrow{k_1}-x^2$ و $x\xrightarrow{k_2}-\sqrt{x}$ و k_1 و k_2 دالتين متناقصتين على $]0,+\infty[$

اذن الدالة k_1+k_2 (اي k) متناقصة تماما على $]0,+\infty[$

تطبيق . 10 : التمثيل البياني لدالة إنطلاقا من بيان معلوم

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، (γ) المنحنى الممثل للدالة f المعرفة بـ : $f(x)=x^2-x-2$ كما هو مبين في الشكل المجاور . استنتج المنحنى الممثل لكل دالة من الدوال التالية :

$h(x)=|f(x)|$ ، $k(x)=f(|x|)$ ، $g(x)=-f(x)$



الحل :

أ) التمثيل البياني للدالة g :

ليكن : (γ_1) المنحنى البياني للدالة g

(γ_1) هو نظير (γ) بالنسبة الى التناظر بالنسبة الى $(x'x)$ (محور الفواصل)

ب) التمثيل البياني للدالة h :

ليكن (γ_2) المنحنى البياني للدالة h

$h(x)=|f(x)|$

لدينا : $f(x)=(x+1)(x-2)$ ومنه اشارة $f(x)$ مدونة في الجدول التالي:

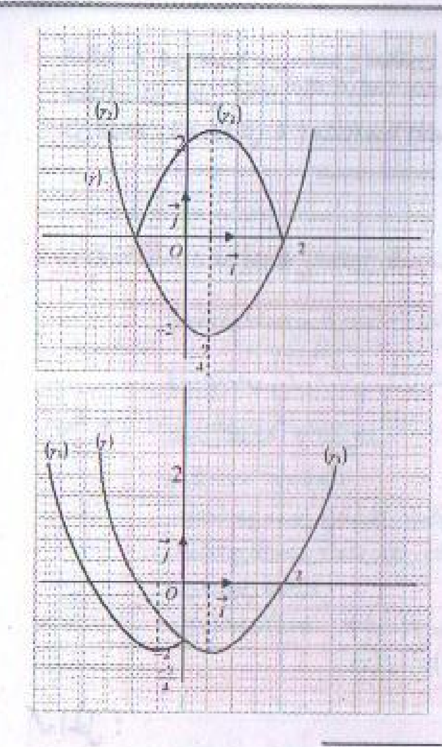
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		-	0	+		+	
$x-2$		-		-	0	+	
$f(x)$		+	0	-	0	+	

- اذا كان : $x\in[-1,2]$ فان : $f(x)\le 0$

ومنه $h(x)=-f(x)$

- اذا كان $x\in]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$ فان: $f(x)\geq 0$ ومنه $h(x)=f(x)$
- اذن اذا كان $x\in]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$ فان، (γ_2) منطبق على (γ)

واذا كان $x\in[-1\ ,\ 2]$ فان (γ_2) هو نظير (γ) بالنسبة الى محور الفواصل $(x\,x')$ انظر إلى الشكل المقابل



ج) - ليكن (γ_3) المنحنى البياني للدالة k

- اذا كان $x\in[0\ ,+\infty[$ فان:
$|x|=x$ ومنه: $k(x)=f(x)$ وبالتالي بيان الدالة k منطبق على (γ) على المجال $[0\ ,+\infty[$
- اذا كان $x\in]-\infty\ ,\ 0]$ فان
$|x|=-x$ ومنه $k(x)=f(-x)$ وبتالي بيان الدالة k هو نظير بيان الدالة f بالتناظر بالنسبة الى محور التراتيب انظر الشكل المجاور

تطبيق . 11 : التعرف على منحنيات دوالها معطاة

في الشكل المقابل مثلنا منحنيات الدالتين f و g المعرفتين على المجال $]0\ ,+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=x^2-4$ و

$g(x)=\sqrt{x}$

نضع: $h(x)=(fog)(x)$ و $k(x)=(gof)(x)$

1) اوجد مجموعة تعريف الدالتين h و k

2) أعط لكل منحنى الدالة الموافقة له.

3) تحقق من أن الدالتين h و k متزايدتين على مجموعة تعريفهما

✓ الحل :

1) مجموعة تعريف الدالة h:

□ مجموعة تعريف الدالة h هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث: $x\in D_g$ و $g(x)\in D_f$

$x\in D_g$ هذا معناه ان: $x\in[0\ ,+\infty[$

من اجل كل $x\in[0\ ,+\infty[$ يكون: $g(x)\in D_f$ وبالتالي: $D_h=[0\ ,+\infty[$

□ مجموعة تعريف الدالة k:

مجموعة تعريف الدالة k هي مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث: $x\in D_f$ و $f(x)\in D_g$

$x\in D_f$ هذا معناه ان: $x\in[0\ ,+\infty[$

$f(x)\in D_g$ يكافئ: $x^2-4\in[0\ ,+\infty[$

$x^2-4\in[0\ ,+\infty[$ يكافئ $x^2-4\geq 0$ يكافئ $x\geq 2$ ومنه: $D_K=[2\ ,+\infty[$

2) المنحنى (γ_1) ممثل الدالة f

المنحنى (γ_2) ممثل الدلة g

المنحنى (γ_3) المثل للدالة gof لان مجموعة تعريف gof هي: $[2\ ,+\infty[$

المنحى (γ_4) المثل للدالة $fo\,g$ لان مجموعة تعريف $fo\,g$ هي: $[0\ ,+\infty[$

3) بما ان الدالة f و g متزايدتين تماما على $]0\ ,+\infty[$ فان الدالة $h=fog$ متزايدة تماما على $]0\ ,+\infty[$

□ بما ان الدالة f و g متزايدتين تماما على $]2\ ,+\infty[$ فان الدالة $k=gof$ متزايدة تماما على المجال $]2\ ,+\infty[$

تطبيق . 12 : اتجاه تغير - عمليات على الدوال

لتكن الدوال f ، g ، h المعرفة كما يلي:

$f(x)=x-\frac{4}{x}$ ، $g(x)=1+\frac{2}{x}$ ، $h(x)=x-2$

1) ا) اكتب f على شكل مجموع الدالتين u و v يطلب تعينهما

ب) ماهو اتجاه تغير الدالتين v و u في المجالين $]0\ ,+\infty[$ و $]-\infty\ ,0[$

واستنتج اتجاه التغير الدالة f في المجالين السابقين.

2) ا) بسط العبارة $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، ب) هل الدالتين h و $\frac{f}{g}$ متساويتين

ج) ما هو المنحنى البياني للدالة $\frac{f}{g}$

✓ الحل :

1) ا) $f(x)=u(x)+v(x)$ حيث : $u(x)=x$ و $v(x)=-\frac{4}{x}$

ب) □ الدالة u هي من الشكل $x\mapsto ax+b$ حيث $a=1$ و $b=0$

وبما ان $a\rangle 0$ فان الدالة u متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.

الدالة $x\to\frac{1}{x}$ متناقصة تماما على المجال $]0,+\infty[$

وبالتالي الدالة : $x\mapsto\frac{-4}{x}$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

إذن الدالة $u+v$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.

□ الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty,0[$ و الدالة $x\mapsto\frac{1}{x}$ متناقصة تماما على $]-\infty,0[$ وبالتالي الدالة $x\mapsto\frac{-4}{x}$ متزايدة تماما على $]-\infty,0[$

وبالتالي الدالة v متزايدة تماما على $]-\infty,0[$

اذن الدالة $u+v$ متزايدة تماما على $]-\infty,0[$.

2) ا) من اجل كل $x\in IR^*$ و $g(x)\neq 0$ ، لدينا :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x-\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{\frac{x^2-4}{x}}{\frac{x+2}{x}}=\frac{x^2-4}{x+2}$$

$$=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=x-2$$

اذن : من اجل كل : $x\in IR^*-\{-2\}$: $\frac{f(x)}{g(x)}=x-2$

ب) من اجل كل $x\in IR^*-\{-2\}$: $\frac{f(x)}{g(x)}=x-2=h(x)$

ومنه الدالتين h و $\frac{f}{g}$ متساويتين على المجموعة ، $D=IR^*-\{-2\}$

ج) بما ان من اجل كل $x\in D$: $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ فان بيان الدالة $\frac{f}{g}$ هو نفسه بيان الدالة h على المجموعة D والمنحى المثل للدالة h على D هو المستقيم ذو المعادلة : $y=x-2$ ما عدا النقطة M ذات الفاصلة -2 والترتيب -4.

تطبيق . 13 : إنشاء بيان دالة نقطة بنقطة

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال : $]1,+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=x+\frac{1}{2x}$ و $g(x)=x-\frac{1}{2x}$

1) بكتابة الدالة g على شكل فرق دالتين مرجعيتين اوجد اتجاه تغيرها على المجال $]1,+\infty[$

2) لتكن الدالتين s و d المعرفتين كما يلي :

$d=f-g$ ، $s=f+g$

ا) اوجد اتجاه تغير الدالتين s و d على المجال : $]0,+\infty[$

ب) مثل بيانيا الدالتين s و d في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المتعامد والمتجانس

3) بملاحظة ان : $f=\frac{1}{2}(s+d)$ انشئ نقطة بنقطة المنحى الممثل للدالة f.

✓ الحل :

1) $g=U-V$ حيث : $U(x)=x$ و $V(x)=\frac{1}{2x}$

□ الدالة : $x\xrightarrow{U}U(x)$ متزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$

□ الدالة : $x\xrightarrow{-V}-V(x)$ متزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$ لان الدالة $x\longrightarrow V(x)$ متناقصة تماما على $]1,+\infty[$

اذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$ لانها مجموع دالتين متزايدتين على $]1,+\infty[$ هما $-V$ و U.

2) ا) □ $s(x)=2x$

الدالة s هي دالة تالفية من الشكل : $x\mapsto ax+b$ حيث : $a=2$ و $b=0$

- بما ان : $a\rangle 0$ فان الدالة s متزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$

□ $d(x)=\frac{1}{x}$

الدالة : $x\mapsto\frac{1}{x}$ متناقصة تماما على المجال $]1,+\infty[$ وبالتالي الدالة d متناقصة تماما على $]1,+\infty[$.

3) $f=\frac{1}{2}(s+d)$

لتكن A نقطة من بيان الدالة s و B نقطة من بيان الدالة d ومنه أي نقطة M من بيان الدالة f فاصلتها هي نفس فاصلة A و B وترتيبها هو الوسط الحسابي لترتيب A و B

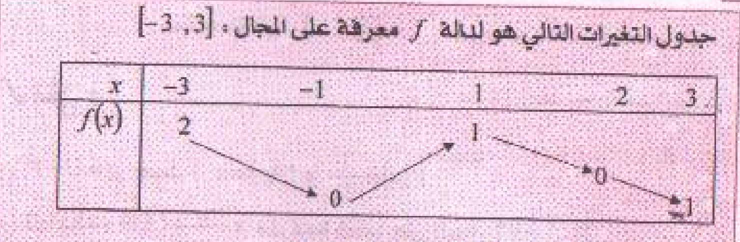
من اجل $x=2$ نجد: $y_A=4$ و $y_B=\frac{1}{2}$ ومنه: $y_f=2,25$ وبالتالي: $M(2\,,2,5)$

من اجل $x=1$ نجد: $y_A=2$ و $y_B=1$ ومنه، $y_f=1,5$ وبالتالي: $M(1\,,1,5)$

من اجل $x=\frac{5}{2}$ نجد: $y_A=5$ و $y_B=0,4$ منه $y_f=2,7$ وبالتالي: $M\left(\frac{5}{2}\,,\,2,7\right)$

تطبيق 14: إستنتاج جدول تغيرات دوال ورسم بيانها

جدول التغيرات التالي هو للدالة f معرفة على المجال: $[-3\,,3]$



x	-3		-1		1		2		3
$f(x)$	2	↘	0	↗	1	↘	0	↘	-1

1) اعط جدول تغيرات كل من الدوال التالية

$k(x)=f(x)+2$ ، $h(x)=-f(x)$ ، $g(x)=2f(x)$

$i(x)=f(|x|)$ ، $L(x)=|f(x)|$

2) ارسم المنحنى الممثل للدالة f على المجال $[-3\,,3]$

3) ارسم في نفس المعلم السابق المنحى الممثل لكل من الدالتين g و k

✓ الحل:

1) □ جدول تغيرات g

لدينا: $g=\lambda f$ حيث: $\lambda=2$ و $\lambda>0$

- بما ان الدالة f متزايدة تماما على $[-1\,,1]$ فان الدالة $g=3f$ متزايدة تماما على $[-1\,,1]$
- بما ان الدالة f متناقصة تماما على المجالين: $[-3,-1]$ و $[1,\;3]$ فإن الدالة g متناقصة تماما على نفس المجالين

$g(-3)=2f(-3)=2\times2=4$

$g(-1)=2f(-1)=2\times0=0$

$g(1)=2f(1)=2\times1=2$

$g(2)=2f(2)=2\times0=0$

$g(3)=2f(3)=2\times(-1)=-2$

ومنه جدول الدالة g هو:

x	-3		-1		1		2		3
$g(x)$	4	↘	0	↗	2	↘	0	↘	-2

□ جدول تغيرات الدالة h:

- اذا كان: $x\in[-1\,,1]$ فان الدالة f متزايدة تماما على المجال: $[-1\,;1]$ وبالتالي الدالة h متناقصة تماما على نفس المجال
- اذا كان $x\in[-3\,,-1]$ او $x\in[1\,,3]$ فان الدالة f متناقصة تماما على هذين المجالين وبالتالي الدالة h متزايدة تماما على هذين المجالين وبالتالي جدول تغيرات h هو

x	-3		-1		1		2		3
$h(x)$	-2	↗	0	↘	-1	↗	0	↗	1

□ جدول تغيرات k:

$k(x)=f(x)+2$ بيان الدالة k هو صورة بيان الدالة f بالانسحاب شعاعه $\vec{U}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ وعليه فان اتجاه تغير الدالة k هو نفسه اتجاه تغير الدالة f ومنه جدول تغيرات الدالة k هو:

x	-3		-1		1		2		3
$k(x)$	4	↘	2	↗	3	↘	2	↘	1

$k(-3)=f(-3)+2=4$

$k(-1)=f(-1)+2=2$

$k(1)=f(1)+2=3$

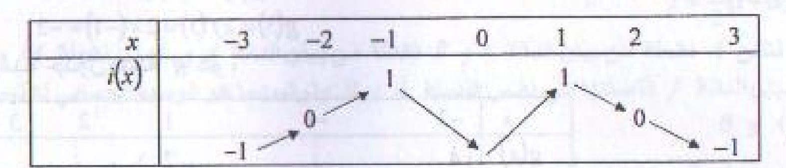
$k(2)=f(2)+2=2$

$k(3)=f(3)+2=1$

□ جدول تغيرات i: $i(x)=f(|x|)$

- اذا كان: $x\geq0$ فان: $i(x)=f(x)$ ومنه اتجاه تغير الدالة i هو نفسه f
- اذا كان: $x\leq0$ فان: $i(x)=f(-x)$ بالتالي إتجاه تغير i عو عكس إتجاه تغير f على المجال

$]0,+\infty[$ ومنه جدول تغيرات i هو :



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$i(x)$	-1	0	1		1	0	-1

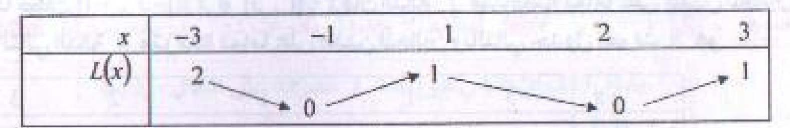
□ جدول تغيرات L : $L(x)=|f(x)|$

- اذا كان x ينتمي الى $[2\ ,\ 3]$ فان : $f(x)\leq 0$

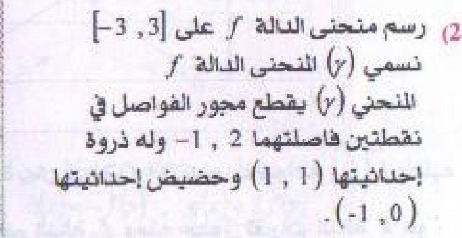
ومنه : $L(x)=-f(x)$ وبالتالي اتجاه تغير L هو عكس اتجاه تغير f

- اذا كان x ينتمي الى $[-3\ ,\ 2]$ فان : $f(x)\geq 0$ ، ومنه : $L(x)=f(x)$

وبالتالي : اتجاه تغير L هو نفس اتجاه تغير f



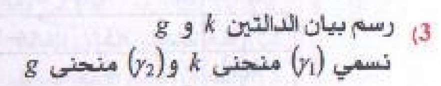
x	-3	-1	1	2	3
$L(x)$	2	0	1	0	1



2) رسم منحنى الدالة f على $[-3\ ,3]$

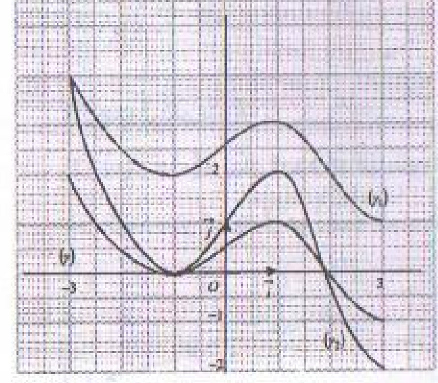
نسمي (γ) المنحنى الدالة f

المنحنى (γ) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما $2\ ,\ -1$ وله ذروة إحداثيتها $(1\ ,1)$ وحضيض إحداثيتها $(-1\ ,0)$.



3) رسم بيان الدالتين k و g

نسمي (γ_1) منحنى k و (γ_2) منحنى g



تطبيق . 15 : إستنتاج تغير دالة بتفكيكها إلى دالتين مرجعيتين بيانها

بكتابة f على شكل مركب دالتين مرجعيتين

استنتج تغيرات الدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\sqrt{3x-6}$ ، $I=[2\ ,+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$ ، $I=]0\ ,+\infty[$

✓ الحل :

1) لتكن الدالتين $u\ ,v$ المعرفتين بالشكل التالي : $u(x)=3x-6$ و $v(x)=\sqrt{x}$

$$x \xrightarrow{u} 3x-6 \xrightarrow{v} \sqrt{3x-6}$$

$v\,o\,u$

اذن : $f(x)=(v\,o\,u)(x)$

بما ان الدالة u تالفية و $a=3$ و $a\rangle 0$ فانها متزايدة تماما على المجال $]2,+\infty[$.

و الدالة المرجعية $x\mapsto v(x)$ متزايدة تماما على $]2,+\infty[$ ومنه الدالة $v\,o\,u$ متزايدة تماما على المجال $]2,+\infty[$

2) لتكن الدالتين $u_1\ ,v_1$ المعرفتين بالشكل التالي : $u_1(x)=x^2+2$ و $v_1(x)=\dfrac{1}{x}$

$$x \xrightarrow{u_1} x^2+2 \xrightarrow{v_1} \frac{1}{x}$$

$v_1\,o\,u_1$

اذن : $f(x)=(v_1 o\, u_1)(x)$

الدالة u_1 متزايدة تماما على المجال : $]0,+\infty[$ والدالة v_1 متناقصة تماما على المجال $]0,+\infty[$ ومنه الدالة $v_1 o\, u_1$ متناقصة تماما على المجال $]0,+\infty[$ أي ان : f متناقصة تماما على $]0,+\infty[$

تطبيق . 16 : إتجاه تغير دالة – إثبات صحة متباينات

f دالة عددية معرفة على المجال $I=]-2\ ,+\infty[$ بالعبارة التالية :

$$f(x)=\frac{x(x^2+5x+7)}{(x+2)^2}$$

1) اوجد الاعداد الحقيقية $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d$ بحيث : من اجل كل عدد حقيقي x من I يكون لدينا : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}+\dfrac{d}{(x+2)^2}$

2) استنتج ان الدالة f متزايدة تماما على I

3) أ) تحقق من اجل كل : $x\in IR$ لدينا :

$$x^2+5x+7=(x+2)^2+x+3$$

ب) إستنتج من أجل كل عدد حقيقي x من I لدينا : $\dfrac{x+5x+7}{(x+2)^2}\rangle 1$

ج) بين لماذا من اجل كل عدد حقيقي x حيث ، $x>2$ يكون لدينا ، $f(x)>x$

د) انطلاقا من جدول تغير الدالة f الذي هو ،

x	-2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

- اوجد المجموعة التي تمسحها الصور $f(x)$ لما x يمسح المجال I

✓ الحل :

1) ايجاد الاعداد الحقيقية d, c, b, a

بحيث من اجل كل x من I لدينا ، $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}+\frac{d}{(x+2)^2}$

$$f(x)=\frac{(ax+b)(x^2+4x+4)+c(x+2)+d}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{ax^3+(4a+b)x^2+(4a+4b+c)x+4b+2c+d}{(x+2)^2}$$

ومن جهة اخرى لدينا ، $f(x)=\frac{x^3+5x^2+7x}{(x+2)^2}$

بالمطابقة نجد ، $a=1$ و $4a+b=5$ و $4a+4b+c=7$ و $4b+2c+d=0$

بعد الحساب نجد $a=1$ و $b=1$ و $c=-1$ و $d=-2$

اذن ، من اجل كل x من I لدينا ، $f(x)=x+1-\frac{1}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}$

2) استنتاج ان الدالة f متزايدة تماما على المجال I

- الدالة $x\xrightarrow{u}x+1$ تالفية ومعامل x هو ، $a=1$ منه u متزايدة تماما على I
- الدالة $x\xrightarrow{v}-\frac{1}{x+2}$ متزايدة تماما على المجال I
- الدالة $x\xrightarrow{w}\frac{-2}{(x+2)^2}$ متزايدة تماما على $]-2,+\infty[$ لان w مركب من دالتين متزايدتين على المجال $]-2,+\infty[$

وبما ان الدالة $f=u+v+w$ و u و v و w متزايدة تماما على I فإن f متزايدة تماما على I

3) ا) من اجل كل x من IR لدينا ، $x^2+5x+7=(x^2+4x+4)+x+3=(x+2)^2+x+3$

ب) من اجل كل عدد حقيقي x من I لدينا ،

$$\frac{x^2+5x+7}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)^2+(x+3)}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)^2}{(x+2)^2}+\frac{(x+3)}{(x+2)^2}=1+\frac{(x+3)}{(x+2)^2}$$

بما ان $x\in I$ فان ، $x+3>0$ و $(x+2)^2>0$

ومنه ، $\frac{x+3}{(x+2)^2}>0$ وبالتالي ، $\frac{x^2+5x+7}{(x+2)^2}>1$

ج) بظرب طرفي المتباينة ، $\frac{x^2+5x+7}{(x+2)^2}>1$ بالعدد x نجد ، $\frac{x(x^2+5x+7)}{(x+2)^2}>x$ ومنه ،

$f(x)>x$

د) من جدول تغيرات الدالة f نستنتج انه لما x يتغير في المجال I فان ، $f(x)$ يتغير في IR وبالتالي لما x يمسح I فان $f(x)$ يمسح IR

تطبيق - 17 : إتجاه تغير جداء دالتين

1) f و g دالتين موجبتين و متزايدتين على المجال I

بين ان الدالة ، $p=fg$ متزايدة على I

2) f و g دالتين متناقصتين على المجال I وموجبتين على I

بين ان الدالة $p=fg$ متناقصة على المجال I

3) اوجد اتجاه تغير كل من الدوال التالية على المجال I ،

ا) $x\mapsto 2x\sqrt{x-1}$ ، $I=[1,+\infty[$

ب) $x\mapsto\frac{\sin x}{x}$ ، $I=\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

✓ الحل :

1) ليكن a و b عددين حقيقيين من I حيث ، $a<b$

بما ان الدالة f متزايدة على I فان ، $f(a)-f(b)<0$

بما ان الدالة g متزايدة تماما على I فان ، $g(a)-g(b)<0$

لنحسب ، $p(a)-p(b)$ ،

$$p(a)-p(b)=f(a)g(a)-f(b)g(b)$$
$$=f(a)g(a)-f(b)g(a)+f(b)g(a)-f(b)g(b)$$
$$=g(a)[f(a)-f(b)]+f(b)[g(a)-g(b)]$$

بما ان ، $f(a)-f(b)<0$ و $g(a)>0$ فان ، $g(a)[f(a)-f(b)]<0$

بما ان ، $g(a)-g(b)<0$ و $f(b)>0$ فان ، $f(b)[g(a)-g(b)]<0$

ومنه : $g(a)[(f(a)-f(b))]+f(b)[g(a)-g(b)]\rangle 0$ اي : $p(a)-p(b)\rangle 0$

مما يدل على ان الدالة p متزايدة على I

2) اثبات ان الدالة P متناقصة تماما على المجال I

- بما ان f متناقصة على I فان : $f(a)-f(b)\rangle 0$
- بما ان g متناقصة تماما على I فان : $g(a)-g(b)\rangle 0$

ومنه يكون : $p(a)-p(b)\rangle 0$ اي ان : $p(a)\rangle p(b)$

منه الدالة p متناقصة على I .

3) ا) $x\mapsto 2x\sqrt{x-1}$ ، $I=[1\ ,+\infty[$

- الدالة $x \xrightarrow{u} 2x$ متزايدة على I وموجبة على I
- الدالة $x \xrightarrow{v} \sqrt{x-1}$ متزايدة على I وموجبة على I

اذن الدالة uv ؛ متزايدة على المجال I

اي ان الدالة $x\mapsto 2x\sqrt{x-1}$ متزايدة على I

ب) $x\mapsto \frac{\sin}{x}$ ، $I=\left[\frac{\pi}{2}\ ,\pi\right]$

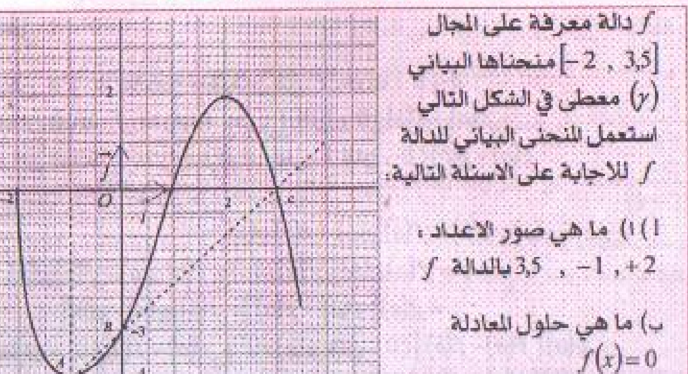
- الدالة $x \xrightarrow{u} \sin x$ موجبة ومتناقصة على I
- الدالة $x \xrightarrow{v} \frac{1}{x}$ موجبة ومتناقصة على I

ومنه الدالة uv متناقصة على المجال I اي ان :

الدالة $x\mapsto \frac{\sin x}{x}$ متناقصة على I

تطبيق . 18 : حل معادلات ومتراجحات بيانيا

f دالة معرفة على المجال $[-2\ ,\ 3,5]$ منحناها البياني (γ) معطى في الشكل التالي استعمل المنحنى البياني للدالة f للاجابة على الاسئلة التالية:



1) ا) ما هي صور الاعداد : $+2\ ,\ -1\ ,\ 3,5$ بالدالة f

ب) ما هي حلول المعادلة $f(x)=0$

ج) ما هي حلول المتراجحة : $f(x)\le 0$

2) ا) ما هي سوابق العدد 0

ب) اوجد سوابق العدد -2

3) لتكن: $A\ ,\ B\ ,\ C$ ثلاث نقط من (γ) ذات الفواصل : $-1\ ,\ 0\ ,\ 3$ على الترتيب.

ا) بين ان النقط $A\ ,\ B\ ,\ C$ على استقامة واحدة

ب) اوجد معادلة للمستقيم (AC)

ج) استنتج مما سبق الحل البياني للمتراجحة : $f(x)\ge x-3$

الحل :

1) ا) صور العدد 2 هي : $f(2)=2$

صور العدد -1 هي العدد -4 : $f(-1)=-4$

صور العدد $3,5$ هي العدد : $-3,5$: $f(3,5)=-3,5$

ب) حلول المعادلة : $f(x)=0$ هي فواصل نقط تقاطع (γ) مع حامل محور الفواصل

نقط تقاطع (γ) مع محور الفواصل هي ثلاث ومنه حلول المعادلة $f(x)=0$ هي :

$-2\ ,\ 1\ ,\ 3$

ج) حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ هي فواصل نقط من (γ) التي تقع تحت المستقيم ذو المعادلة $y=0$ ومن الشكل نجد ان : هذه الفواصل تنتمي الى المجالين $[-2\ ,\ 1]$ و $[3\ ,\ 3,5]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ هي : $s=[-2,\ 1]\cup[3\ ,\ 3,5]$

2) ا) لتكن x سابقة للعدد 0 منه : $f(x)=0$

إذن سوابق العدد 0 هي حلول المعادلة $f(x)=0$ ومن السؤال 1) ب) نجد ان سوابق الصفر هي $-2\ ,\ 1\ ,\ 3$.

ب) ايجاد عدد سوابق العدد -2.

سوابق العدد -2 هي فواصل نقط تقاطع (γ) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-2$ ومن الشكل نلاحظ ان المستقيم ذو المعادلة $y=-2$ يقطع (γ) في ثلاث نقط ومنه فان عدد سوابق العدد -2 هي ثلاثة .

3) ا) اثبات ان $A\ ,\ B\ ,\ C$ على استقامة واحدة.

$A\ ,\ B\ ,\ C$ على استقامة يكافئ ان : $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ متوازيان

$\vec{AB}(1\ ,1)$ ، $\vec{AC}(4\ ,4)$

ومن شروط التوازي نجد : $1\times4-4\times1=0$

ومنه $\vec{AB}$ يوازي $\vec{AC}$

إذن النقط A , B , C على استقامة واحدة .

ب) ايجاد معادلة المستقيم (AC)

لتكن $M(x , y)$ نقطة من (AC) منه ؛ $\vec{AM}$ و $\vec{AC}$ مرتبطين خطيا .

$\vec{AM}(x+1 , y+4)$

من شرط توازي شعاعين نجد : $4(x+1)-4(y+4)=0$ بالتبسيط نجد : $y=x-3$

ج) استنتاج الحل البياني للمتراجحة : $f(x)\geq x-3$

حلول المتراجحة : $f(x)\geq x-3$ هي فواصل نقط من منحنى (γ) والتي تقع فوق المستقيم (AC) وهذه الفواصل تنتمي الى المجالين : $[-2,-1]$ و $[0 , 3]$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة : $f(x)\geq x-3$ هي : $s=[-2,-1]\cup[0 ,3]$

تطبيق - 19 : تساوي دالتين

في كل حالة من الحالات التالية هل الدالتين f و g متساويتين واذا كان الجواب بلا ما هي المجموعة التي تكون فيها الدالتين متساويتين

1) $f(x)=\sqrt{(x-2)^2}$ ، $g(x)=x-2$

2) $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{(x-2)(x+2)}$ ، $g(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2-4}$

3) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$ ، $g(x)=x-3$

✓ الحل :

1) $D_f=IR$ ، $D_g=IR$

من اجل كل $x\in IR$ ؛ لدينا : $f(x)=|x-2|$

حتى تكون الدالتين f و g متساويتين يجب ان يكون لهما نفس مجموعة التعريف D ومن اجل كل $x\in D$ ؛ يكون لدينا : $f(x)=g(x)$

من اجل كل : $x\in]-\infty, 2[$ ؛ $f(x)=-(x-2)$

وبالتالي من اجل كل ، $x\in]-\infty, 2[$ ؛ $f(x)=-g(x)$ اي ان الدالتين f و g غير متساويتين على IR .

إذن المجموعة التي تكون فيها الدالتين f و g متساويتين هي : $[2 , +\infty[$

2) $D_f=IR-\{-2 , 2\}$ ، $D_g=IR-\{-2 , 2\}$

ومن اجل كل $x\in D_f$ ؛ لدينا $g(x)=\frac{x^2+2x+1}{(x-2)(x+2)}=f(x)$ لأن $x^2+2x+1=(x+1)^2$

ومنه الدالتين f و g لهما نفس مجموعة التعريف ؛ $IR-\{-2 , 2\}$

و من اجل كل $x\in IR-\{-2 , 2\}$ ؛ $f(x)=g(x)$

إذن ؛ f و g دالتين متساويتين

3) $D_f=IR-\{-3\}$ و $D_g=IR$

بما ان : $D_g\neq D_f$ فان الدالتين ، f و g غير متساويتين .

- اما كان : $x\in IR-\{-3\}$ فإن : $f(x)=\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=x-3=g(x)$

اذا الدالتين : f و g متساويتين على المجموعة $IR-\{-3\}$

تطبيق - 20 : دارسة شفعية كل من الدالتين $f+k$, kf

1) f دالة زوجية , k عدد حقيقي ثابت غير معدوم

هل الدالة g المعرفة كما يلي : $g:x\mapsto f(x)+k$ زوجية ؟

نفس الشيئ بالنسبة الى الدالة : $h:x\mapsto kf(x)$

2) f دالة فردية

- هل الدالة g المعرفة ب: $g:x\mapsto f(x)+k$ فردية ؟
- هل الدالة h المعرفة ب: $h:x\mapsto kf(x)$ فردية ؟

✓ الحل :

1) لتكن D مجموعة تعريف الدالة f

- من اجل كل : $x\in D , -x\in D$: $g(-x)=f(-x)+k=f(x)+k=g(x)$

و منه الدالة g زوجية

من اجل $x\in D_f$ ، $-x\in D_f$ ، $h(-x)=kf(-x)=kf(x)=h(x)$

و منه الدالة h زوجية

2) من جل : $x\in D_f$ ، $-x\in D_f$ ، $g(-x)=f(-x)+k=-f(x)+k\neq g(x)$

منه الدالة g ليست فردية و لا زوجية

- من جل كل $x\in D_f$ ، $-x\in D_f$ ؛ $h(-x)=kf(-x)=-kf(x)=-h(x)$

منه الدالة h فردية

تطبيق 21 : مجموع دالتين الأولى زوجية والثانية فردية

f دالة معرفة على IR ، P و Q دالتين معرفتين كما يلي:

$$P(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \quad \text{و} \quad Q(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

1) بين ان الدالة p هي دالة زوجية و Q دالة فردية

2) استنتج ان كل دالة معرفة على IR هي مجموع دالتين الأولى فردية والاخرى زوجية

3) حدد الدالتين P و Q اذا كانت f دالة معرفة كما يلي: $f(x)=\frac{3x-4}{x^2+1}$

✓ الحل :

1) $D_P=IR$ ، من اجل كل $x\in IR$ فإن: $-x\in IR$ و

$$P(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=p(x)$$ منه p دالة زوجية

$D_Q=IR$ ، من اجل كل $x\in IR$ فإن: $-x\in IR$

و $$Q(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(-(-x))]=\frac{1}{2}[f(-x)-f(+x)]$$

$$=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-Q(x)$$

منه Q دالة فردية



2) من اجل كل x من IR لدينا:

$$P(x)+Q(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

$$=\frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2}=\frac{2f(x)}{2}=f(x)$$

اذن الدالة f هي مجموع دالتين Q و P

3) $f(x)=\frac{3x-4}{x^2+1}$

بما ان من أجل كل $x\in IR$ $x^2+1 \rangle 0$ ومنه: $D_f=IR$ لدينا:

$$P(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{3x-4}{x^2+1}+\frac{-3x-4}{x^2+1}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{-8}{x^2+1}\right]=\frac{-4}{x^2+1}$$

$$Q(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{3x-4}{x^2+1}-\frac{-3x-4}{x^2+1}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{6x}{x^2+1}\right]=\frac{3x}{x^2+1}$$

تطبيق 22 :

كتابة معادلة منحى في معلم جديد محور تناظر المنحنى (γ) المجاور معادلته: $y=x^2-4x+3$ في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) من الشكل نلاحظ ان المنحنى (γ) يقبل محور تناظر موازي لمحور التراتيب يطلب تعين معادلته

2) اختر نقطة من هذا المستقيم واعتبرها كمبدا للمعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$ ثم اكتب معادلتي تغير المعلم

3) استعمل معادلتي تغير المعلم لكتابة معادلة المنحنى (γ) في المعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$ ولتكن: $Y=g(X)$ ثم تحقق ان المستقيم المفترض هو فعلا محور تناظر لـ: (γ)

✓ الحل :

1) من الشكل نلاحظ ان منتصف القطعة $[A_1B_1]$ حيث: $A_1(1,0)$ و $B_1(3,0)$ تنتمي الى المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $x=2$

- كذلك منتصف القطعة $[CD]$ حيث: $C(0,3)$ و $D(4,3)$ تنتمي الى المستقيم (Δ)

اذن يمكن ان يكون المستقيم (Δ) محور تناظر للمنحني (γ)

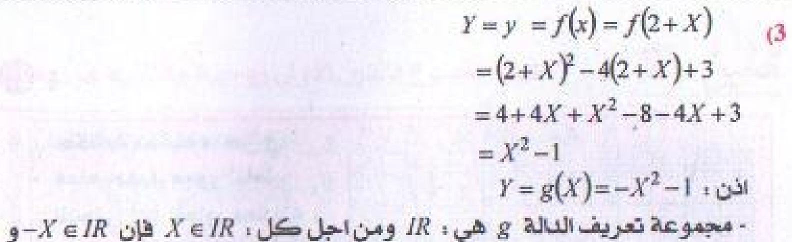
2) لتكن $A(2,0)$ من المستقيم (Δ)

لتكن: $M(x,y)$ نقطة من المستوي منه حسب علاقة شال: $\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}$

احداثيتي $\vec{OM}(x,y)$ و $\vec{AM}(X,Y)$ و $\vec{OA}(2,0)$

من المساواة: $\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}$ نجد: $\begin{cases}x=2+X\\y=Y\end{cases}$

اذن الجملة: $\begin{cases}x=2+X\\y=Y\end{cases}$ هي معادلتي تغير المعلم



(3 $Y = y = f(x) = f(2+X)$

$= (2+X)^2 - 4(2+X) + 3$

$= 4 + 4X + X^2 - 8 - 4X + 3$

$= X^2 - 1$

اذن : $Y = g(X) = -X^2 - 1$

- مجموعة تعريف الدالة g هي : IR ومن اجل كل : $X \in IR$ فإن $-X \in IR$ و

$g(-X) = (-X)^2 - 1 = X^2 - 1 = g(X)$

منه الدالة g زوجية في العلم $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$

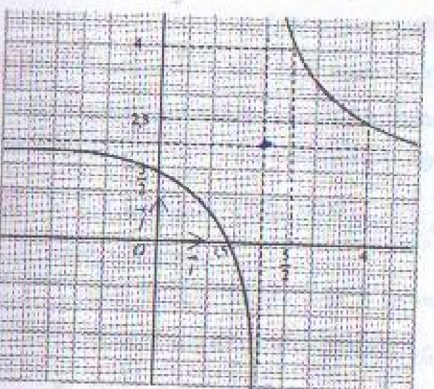
اذن فعلا المستقيم (Δ) ذوا المعادلة : $x = 2$ محور تناظر لـ : (γ_1)

التمارين من الى تتعلق بالانتقال من منحنى الى آخر .

تمارين و مسائل

1 - تمرين على مركز التناظر :

المنحنى البياني الممثل في الشكل المجاور معادلته : $y = \frac{2x-3}{x-2}$

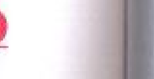


من الشكل

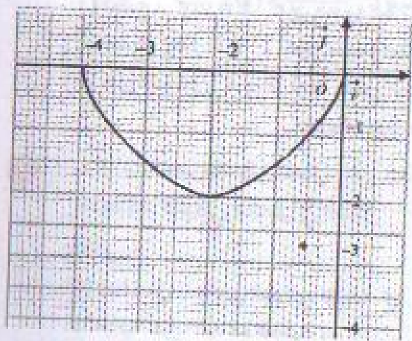
1) نلاحظ ان المنحنى (γ) يقبل مركز تناظر A يطلب تعينه .

2) اوجد معادلتي تغير العلم $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$

3) استعمل معادلتي تغير العلم $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$ لكتابة معادلة المنحني (γ) على الشكل : $Y = h(X)$ ثم تحقق ان النقطة A هي فعلا مركز تناظر لـ : (γ)



2 - لتكن : f الدالة التي منحناها البياني هو نصف الدائرة ذات المركز $A(-2, 0)$ الممثلة في الشكل المجاور .



1) ارسم المنحنيات البيانية لكل من الدوال المعرفة كما يلي :

أ) $g(x) = -f(x)$

ب) $h(x) = 3f(x)$

ج) $k(x) = f(x) + 1$

د) $L(x) = |f(x)|$

هـ) $d(x) = f(-x)$

3 - لتكن (γ) المنحنى البياني للدالة f المعرفة على IR بـ : $f(x) = x^3 - 3x - 1$

1) استنتج من المنحنى البياني للدالة f منحنيات الدوال المعرفة على IR التالية

$g(x) = -f(x)$

$h(x)=|f(x)|$

$k(x)=f(-x)$

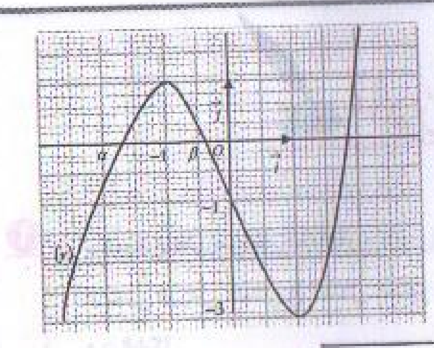
2) تعرف على IR الدالة F

حيث :

$F(x)=f\left(|x|\right)$

ا) بين ان F دالة زوجية

ب) استنتج من المنحنى البياني للدالة f المنحنى البياني لدالة F



4 1) احسب : $\left(x^2+ax+b\right)^2$ حيث : a و b عددين حقيقين

2) بين ان : $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ هو مربع ثلاثي حدود من الدرجة الثانية

5 - f و g دالتين معرفتين كما يلي : $f(x)=\dfrac{x+4}{x+2}$ و $g(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$

نضع : $h=gof$

1) اوجد مجموعة تعريف الدالة h ثم احسب $h(x)$

2) الدالة k معرفة ب: $k(x)=\dfrac{x+4}{3x+8}$

هل اللدالتين k و h متساويتين

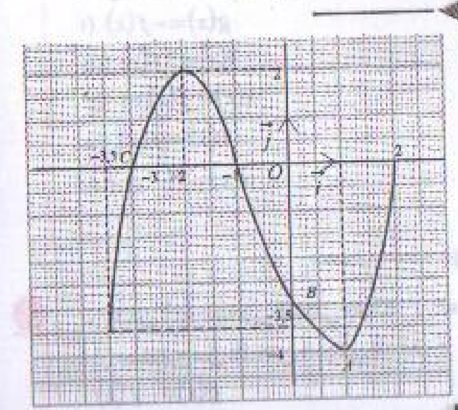
6 - f و g دلتن معرفتان على IR ، $f(x)=x^2-2$ ، $g(x)=\sqrt{x+2}$

1) نضع ، $h=gof$ عين مجموعة تعريف الدالة h ثم احسب $h(x)$

2) نضع $k=fog$ ، عين مجموعة تعريف الدالة k ثم احسب $k(x)$

3) هل الدالتين k و h لهما نفس العبارة ؟ وهل هما متساويتان .

7 - f دالة معرفة على المجال $[-3,5\ ,\ 2]$ منحناها البياني معطى في الشكل التالي :



1) استعمل المنحنى البياني للدالة f للاجابة عن الاسئلة التالية :

ا) ما هي صور الاعداد : $-3,5$ ، 1 ، -2 بالدالة f

ب) ما هي حلول المعادلة $f(x)=0$

ج) ما هي حلول المعادلة $f(x)=2$

د) ما هي حلول المتراجحة $f(x)\leq 0$

ه) m عدد حقيقي

ناقش حسب قيم قيم m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$

2) ا) ما هي سوابق العدد 0 .

ب) اوجد عدد سوابق العدد -4

3) لتكن النقط A, B, C من (γ) فواصلها على الترتيب $-3,0,1$

ا) بين ان النقط A, B, C تقع على استقامة واحدة

ب) اوجد معادلة المستقيم (AB)

ج) استنتج مما سبق الحل البياني للمتراجحة : $f(x)\leq -x-3$

8 - f دالة معرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{\cos x+2}$

1) برهن انه من جل كل عدد حقيقي x ، $1\leq 2+\cos x\leq 3$

واستنتج ان f معرفة على IR

2) ا) نضع v الدالة $\cos$ عرف الدالة g حيث : $f=gov$

ب) استنتج دورا للدالة f

ج) هل الدالة f زوجية ؟

3) باستعمال المتباينة المحققة من اجل كل : $x\in IR$ ؛

$1\geq \cos x\geq -1$ بين انه يوجد عددين α و β بحيث : $\beta\geq f(x)\geq \alpha$

4) من جدول تغيرات الدالة v استنتج جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0,\pi]$

9 - f دالة معرفة على المجال : $]-3,+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$

1) ا) (γ) المنحنى البياني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

كما هو في الشكل المجاور ، من المنحنى اوجد العدد الحقيقي α

بحيث : من اجل كل $x > -3$

يكون : $f(x) < \alpha$

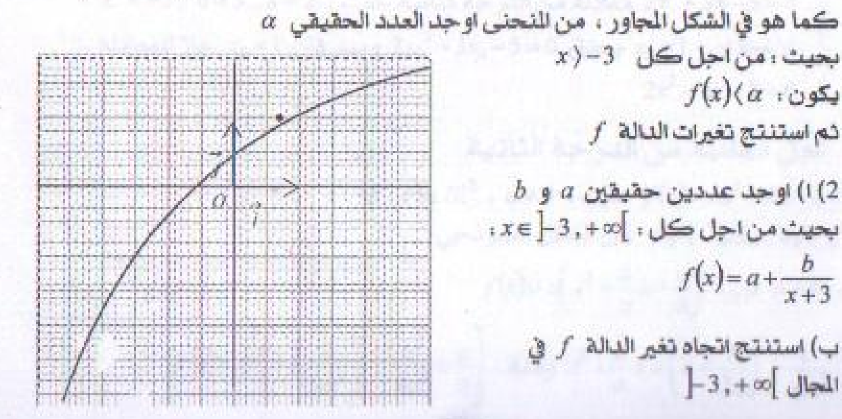
ثم استنتج تغيرات الدالة f

2) ا) اوجد عددين حقيقين a و b

بحيث من اجل كل : $x\in]-3,+\infty[$ ؛

$f(x)=a+\dfrac{b}{x+3}$

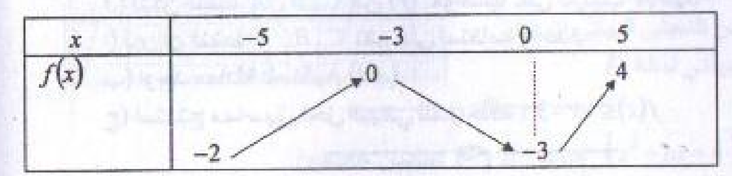
ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f في المجال $]-3,+\infty[$



ج) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x \in]-3, +\infty[$ ، $f(x) \leq 2$

د) ما هي المجموعة التي تمسحها الصورة $f(x)$ لما x يمسح $]-3, +\infty[$

10 - ليكن جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $[-5\ ,\ 5]$



x	-5		-3		0		5
$f(x)$	-2	↗	0	↘	-3	↗	4

1) من الجدول السابق اوجد جدول تغيرات الدوال التالية :

$L(x) = |f(x)|$, $l(x) = f(x) - 2$, $h(x) = -f(x)$, $g(x) = 4f(x)$, $k(x) = f(|x|)$

2) ارسم المنحنى (γ) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

في نفس المعلم السابق ارسم المنحنيات الدوال المعرفة سابقا .

الدَّرس : 2



المعادلات والمتراجحات

1 . حل معادلة من الدرجة الثانية

1.1 تعريف

معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x هي كل معادلة من الشكل : $ax^2 + bx + c = 0$
حيث : a, b, c ثلاث إعداد حقيقية معطاة و $a \neq 0$

- حل المعادلة : $ax^2 + bx + c = 0$ هو إيجاد كل الأعداد x_0 بحيث : $ax_0^2 + bx + c = 0$
- نقول عن العدد x_0 حلا او جذرا للمعادلة : $ax^2 + bx + c = 0$

♦ مثال

$2x^2 + 3x - 5 = 0$ معادلة من الدرجة الثانية حيث : $a = 2$, $b = 3$, $C = -5$

نلاحظ ان : $x_0 = 1$ يحقق $2x_0^2 + 3x_0 - 5 = 0$ ومنه فان $x_0 = 1$ حلا للمعادلة $2x^2 + 3x - 5 = 0$

2.1 حل معادلة من الدرجة الثانية

نضع : $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث : $a \neq 0$ ، $(b, c) \in IR^2$

☐ اولا : نكتب $f(x)$ على الشكل النموذجي

بما ان : $a \neq 0$ فان : $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

لكن : $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$ ، ومنه $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{4a^2}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

تسمى هذه الكتابة بالشكل النموذجي لـ: $f(x)$

□ ثانيا : حل المعادلة : $f(x)=0$

نضع : $\Delta=b^2-4ac$ ومنه : $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

- إذا كان : $\Delta<0$ فإن : $\frac{-\Delta}{4a^2}>0$ ولدينا : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ منه ينتج $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ وبالتالي المعادلة : $f(x)=0$ ليس له حلول في IR

- إذا كان : $\Delta=0$ فإن : $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

$f(x)=0$ إذا وفقط إذا كان : $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ وبما ان : $a\neq 0$ فإن : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ أي : $x=\frac{-b}{2a}$ بالتالي المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد مضاعف $\frac{-b}{2a}$

- إذا كان : $\Delta>0$ فإن نكتب : $\Delta=\left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ ومنه : $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}\right]$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

بوضع : $x_1=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ فإن : العبارة $f(x)$ تكتب كما يلي :

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

$f(x)=0$ إذا وفقط إذا كان : $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ وبما ان $a\neq 0$ فإن : $x-x_1=0$ أو $x-x_2=0$ أي : $x=x_1$ أو $x=x_2$ بالتالي المعادلة : $f(x)=0$ لها حلين x_1 ، x_2

□ مبرهنة

$f(x)=ax^2+bx+c$ حيث : $a\neq 0$ و c ، b إعداد حقيقية و $\Delta=b^2-4ac$ مميز ثلاثي حدود $f(x)$

- إذا كان : $\Delta<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ ليس لها حلول في IR

- إذا كان : $\Delta=0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $-\frac{b}{2a}$ (يسمى حلا مضاعفا)
- إذ كان $\Delta>0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ لها حلين x_1 ، x_2

حيث : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

مثال

حل في IR المعادلات التالية :

1) $x^2+x+1=0$ ، 2) $x^2+5x-6=0$ ، 3) $x^2+2x+1=0$

الحل :

1) $x^2+x+1=0$ ، $a=1$ ، $b=1$ ، $c=1$

$\Delta=b^2-4ac$ ومنه $\Delta=1-4=-3$

بما ان : $\Delta<0$ فإن المعادلة : $x^2+x+1=0$ ليس لها حلول في IR

2) $x^2+5x-6+0$ ، $a=1$ ، $b=5$ ، $c=-6$

$\Delta=b^2-4ac$ منه $\Delta=25-4(1)(-6)$ منه $\Delta=49$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة $x^2+5x-6=0$ لها حلين x_1 ، x_2

حيث : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-7}{2}=-6$ ، $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+7}{2}=1$

منه المعادلة : $x^2+5x-6=0$ لها حلين : -6 ، 1

3) $x^2+2x+1=0$ ، $a=1$ ، $b=2$ ، $c=1$

$\Delta=b^2-4ac$ منه : $\Delta=0$

بما ان : $\Delta=0$ فإن المعادلة : $x^2+2x+1=0$ لهل حل وحيد

$x_0=-\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1$

3.1 العلاقة بين جذري معادلة من الدرجة الثانية

إذا كانت المعادلة : $f(x)=0$ حيث : $f(x)=ax^2+bx+c$

و $a\neq 0$ تقبل حلين x_1 ، x_2 فإن :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{c}{a}$$

إذن ، $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

تمرين تدريبي

1) نعتبر في مجموعة الإعداد الحقيقية المعادلة ، $f(x)=5x^2+4x-9=0$

- عين الحل x_2 للمعادلة $f(x)=0$ إذا علمت ان ، $x_1=1$ حلا لها

2) لتكن ، $g(x)=0$ معادلة من الدرجة الثانية حيث معامل x^2 هو 2

- عين عبارة $g(x)$ علما ان $x_1=2$ و $x_2=-3$ حلين للمعادلة ، $g(x)=0$

الحل :

1) بما ان x_1 و x_2 حلين للمعادلة $f(x)=0$ فان ، $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$

بتعويض قيمة x_1 في المساويتين ، $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ نجد ، $1+x_2=\frac{-4}{5}$

ومنه ، $x_2=\frac{-4}{5}-1=\frac{-9}{5}$

2) بما ان $g(x)=0$ معادلة من الدرجة الثانية و x_1 ، x_2 حلين لها

فان ، $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $x_1 x_2=\frac{c}{a}$

بالتعويض نجد ، $\frac{-b}{a}=-1$ و $\frac{c}{a}=-6$

منه ينتج ، $a=b$ و $c=-6a$

وبالتالي ، $g(x)=ax^2+ax-6a$ بتعويض قيمة a نجد ، $g(x)=2(x^2+x-6)$

2 - تحليل وإشارة ثلاثي حدود

1.2 تحليل ثلاثي الحدود

ليكن $f(x)$ ثلاثي حدود معرف بالعبارة ، $f(x)=ax^2+bx+c$

حيث ، $a\neq 0$ و b و c إعداد حقيقية وليكن Δ مميز المعادلة ، $f(x)=0$

- إذا كان ، $\Delta < 0$ فان ، $f(x)$ لا يتحلل إلى جداء عوامل
- إذا كان ، $\Delta > 0$ فان ، $f(x)=0$ لها حلين مختلفين x_2 ، x_1 .وبالتالي ،

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

- إذا كان $\Delta=0$ فان المعادلة $f(x)=0$ لها حل مضاعف ، $x_0=\frac{-b}{2a}$

وعليه من اجل كل x من IR ، $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

مثال

$f(x)=2x^2+x-10$ ، $g(x)=3x^2+18x+27$

- حلل $f(x)$ و $g(x)$ إلى جداء عوامل .

الحل :

1) تحليل $f(x)$

$\Delta=b^2-4ac$ منه $\Delta=81$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة $f(x)=0$ لها حلين ، x_2 ، x_1 حيث ،

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-9}{4}=\frac{-5}{2}$ ، $x_2=\frac{-1+9}{4}=\frac{8}{4}=2$

بالتالي ، $f(x)=2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-2)$

2) تحليل $g(x)$

$\Delta=18^2-4(3)(27)=324-324\neq 0$

$\Delta=0$ ومنه المعادلة ، $g(x)=0$ لها مضاعف $\frac{-b}{2a}$

بالتالي ، $\frac{-b}{2a}=\frac{-18}{6}=-3$ ، $g(x)=3(x+3)^2$

2.2 إشارة ثلاثي الحدود

مبرهنة

$f(x)$ ثلاثي حدود معرف كما يلي ، $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث ، $a\neq 0$ و c ، b عددين حقيقيين و Δ مميز $f(x)=0$

- إذا كان ، $\Delta<0$ فان إشارة $f(x)$ هي نفس إشارة a من اجل كل عدد حقيقي x
- إذا كان ، $\Delta=0$ فان إشارة $f(x)$ هي نفس إشارة a من اجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $x=\frac{-b}{2a}$
- إذا كان : $\Delta>0$ فان إشارة $f(x)$ هي نفس إشارة a خارج الجذرين وعكس إشارة a داخل الجذرين .

الاثبات

الشكل النموذجي لـ : $f(x)$ هو : $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

إذا كان $\Delta\langle 0$ فإن العدد $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ موجب تماما وعليه فان إشارة $f(x)$ من إشارة العدد a من اجل كل x من IR.

-إذا كان : $\Delta=0$ فان اشارة $f(x)$ هي من إشارة العدد a من اجل كل $x\neq\frac{-b}{2a}$

- إذا كان : $\Delta\rangle 0$ ، فان : $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

$f(x)$ هو جداء ثلاث عوامل الأول a وهو ثابت و العاملين الآخرين هما ثنائي حد من الدرجة الأولى واللذان نستطيع تعيين إشارتهما من اجل كل x

نفرض ان : $x_1 \langle x_2$

نلخص إشارة $f(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		إشارة a		إشارة a		إشارة a	
$x-x_1$		-	0	+		+	
$x-x_2$		-		-	0	+	
$(x-x_1)(x-x_2)$		+		-		+	
$f(x)$		إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a	

مثال

عين إشارة ثلاثي الحدود $f(x)$ حيث : $f(x)=-3x^2+5x+8$

الحل :

$\Delta=5^2-4(-3)(8)=121$

$\Delta\rangle 0$ ومنه المعادلة : $f(x)=0$ لها حلين مختلفين :

$x_1=\frac{-5-11}{-6}=\frac{-8}{3}$ و $x_2=\frac{-5+11}{-6}=-1$ ومنه : $f(x)=-2(x+1)\left(x+\frac{8}{3}\right)$

وإشارة $f(x)$ مدونة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$\frac{-8}{3}$		-1		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

$f(x)$ سالب تماما لما x ينتمي إلى المجموعة : $\left]-\infty,\frac{-8}{3}\right[\cup\left]-1,+\infty\right[$ و $f(x)$ موجب تماما لما x تنتمي الى $\left]-\frac{8}{3},-1\right[$

3.2 حل متراجحة من الدرجة الثانية

- نسمي متراجحة من الدرجة الثانية كل متراجحة من الشكل :

$ax^2+bx+c\langle 0$ أو $ax^2+bx+c\leq 0$ أو $ax^2+bx+c\rangle 0$ أو $ax^2+bx+c\geq 0$

حيث : $a\neq 0$ و b و c عددان حقيقيان.

- حل المتراجحة : $ax^2+bx+c\langle 0$ يعني تعيين الإعداد الحقيقية x التي تجعل : $ax^2+bx+c\langle 0$ ومن اجل ذلك نعين إشارة ثلاثي الحدود : ax^2+bx+c

مثال

- حل في IR المتراجحات التالية :

1) $x^2+x+1\langle 0$ ، 2) $2x^2+3x+7\rangle 0$ ، 3) $-3x^2+6x+9\geq 0$

الحل :

1) $x^2+x+1\langle 0$ ، $\Delta=1-4=-3$

$\Delta\langle 0$ بالتالي ثلاثي الحدود (x^2+x+1) ليس له جذور وإشارته من إشارة a $(a=1)$

إذن من اجل كل x من IR ، $x^2+x+1\rangle 0$ وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة : $x+x+1\langle 0$ هي : ϕ

2) $2x^2+x+7\rangle 0$ ، $\Delta=9-(4)(2)(7)$ ومنه : $\Delta=-47$

$\Delta\langle 0$ بالتالي ثلاثي الحدود $(2x^2+3x+7)$ ليس له جذور وإشارته من نفس شارة a $(a=+2)$ أي : موجبة

إذن : من اجل كل x من IR ، $2x^2+3x+7\rangle 0$

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة : $2x^2+3x+7\rangle 0$ هي IR .

3) $-3x^2+6x+9\geq 0$ ، $\Delta=36-4(-3)(9)$ منه : $\Delta=144$

$\Delta\rangle 0$ ومنه ثلاثي الحدود : $(-3x^2+6x+9)$ له جذرين $x_1=-1$ و $x_2=3$ وإشارة $(-3x^2+6x+9)$ مدونة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
إشارة $f(x)$		-	0	+	0	-	

من الجدول اعلاه نستنتج أن مجموعة قيم x التي من أجلها يكون $-3x^2+6x+9\geq 0$ هي $[-1\ ,\ 3]$

و بالتالي مجموعة حلول للتراجحة : $-3x+6x+9\geq 0$ هي : $s=[-1\ ,3]$

3 - ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية والقطع المكافئ

الهدف من هذه الفقرة هو تبيان ان التمثيل البياني لدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية هو عبارة عن قطع مكافئ.

ليكن (γ) التمثيل البياني للدالة f المعرفة بالشكل : $f(x)=ax^2+bx+c$ و $a\neq 0$.

معادلة (γ) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي : $y=f(x)$، بكتابة $f(x)$ على الشكل النموذجي نجد :

$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ وبإضافة $\frac{\Delta}{4a^2}$ إلى طرفي المساواة الأخيرة نجد :

$$y+\frac{\Delta}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

بوضع $X=x+\frac{b}{2a}$ و $Y=y+\frac{\Delta}{4a}$ تصبح هذه المعادلة من الشكل : $Y=aX^2$

- لتكن $A\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ نقطة من المستوي في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ لنبحث عن معادلة (γ) في المعلم $(A,\vec{i},\vec{j})$ ولتكن M نقطة كيفية من المستوي إحداثياها (x,y) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و (X,Y) في المعلم $(A,\vec{i},\vec{j})$، حسب علاقة شال نجد : $\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}$

ومنه نستنتج : $\begin{cases} x=-\frac{b}{2a}+X \\ y=\frac{-\Delta}{4a}+Y \end{cases}$ ومنه نستنتج : $\begin{cases} x+\frac{b}{2a}=X \\ y+\frac{\Delta}{4a}=Y \end{cases}$

- معادلة المنحى (γ) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي : $y+\frac{\Delta}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

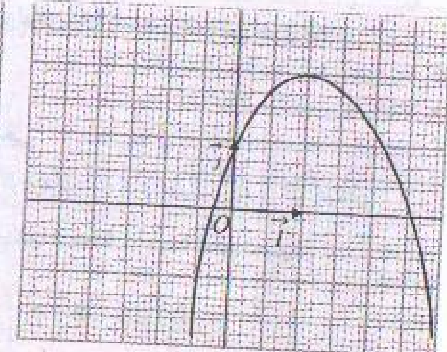
و باستعمال معادلات تغير معلم نجد : $Y=aX^2$ وهذه الأخيرة تمثل معادلة (γ) في المعلم $(A,\vec{i},\vec{j})$.

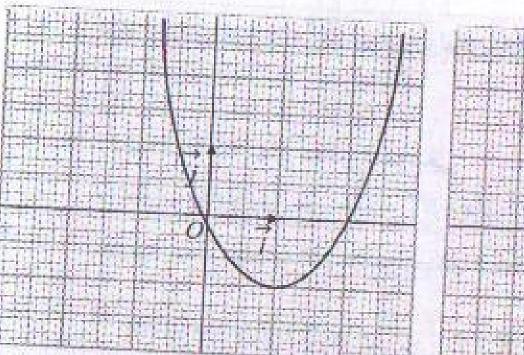
خلاصة

المنحى (γ) هو قطع مكافئ لان معادلته من الشكل : $Y=aX^2$ في المعلم $(A,\vec{i},\vec{j})$

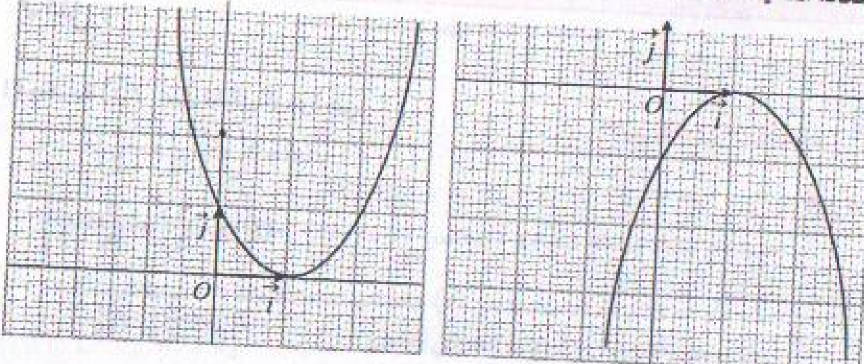
- في حالة : $a>0$ فان القطع المكافئ (γ) مشدود نحو الأعلى
- في حالة : $a<0$ فان القطع المكافئ (γ) مشدود نحو الأسفل.
- المستقيم ذوا المعادلة : $x=-\frac{b}{2a}$ هو محور تناظر للمنحى (γ)
- في حالة $a>0$ الدالة : $f:x\mapsto ax^2+bx+c$ لها قيمة حدية صغرى من اجل : $x=\frac{-b}{2a}$
- في حالة : $a<0$ الدالة : $f:x\mapsto ax^2+bx+c$ لها قيمة حدية عظمى من اجل : $x=\frac{-b}{2a}$.
- إشارة Δ تعطينا فكرة عن عدد نقط تقاطع (γ) مع محور الفواصل وإشارة a بفضلها نعرف هل المنحى (γ) مشدود نحو الأعلى او نحو الأسفل ومن اجل ذلك نميز الحالات الثلاثة التالية :

الحالة الأولى $\Delta>0$

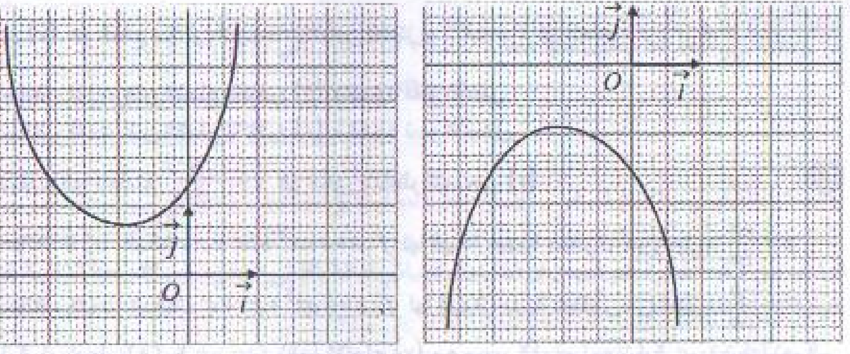
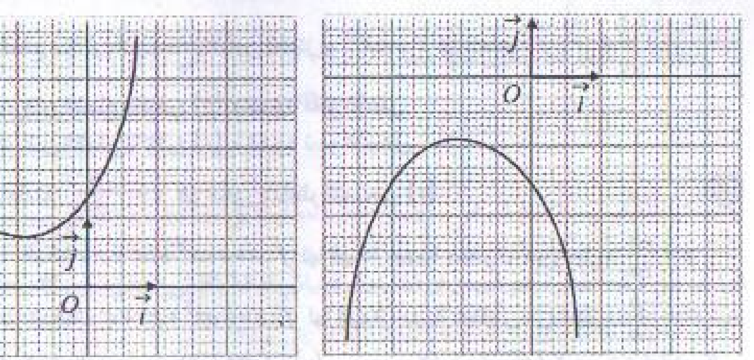




الحالة الثانية : $\Delta=0$



□ حالة الثالثة $\Delta < 0$

تمرين تدريبي

لتكن الدالة : $f: x \mapsto 2x^2+3x-5$ وليكن (γ) المنحنى البياني لها في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) اكتب $f(x)$ على الشكل النموذجي

2) اكتب معادلة (γ) على الشكل : $y+\alpha=a(x+\beta)^2$ حيث : α و β عددان حقيقيان يطلب تعينهما ثم استنتج احداثيا النقطة A مبدأ المعلم الجديد $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$

3) اكتب معادلة (γ) في المعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$ ثم ارسم (γ)

4) حل بيانيا المتراجحة $f(x)\le 0$.

✓ الحل :

1) كتابة $f(x)$ على الشكل النموذجي

$$f(x)=2\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}\right)$$

$$=2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-\frac{5}{2}\right]$$

$$=2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right]$$

2) كتابة معادلة (γ) على الشكل : $y+\alpha=a(x+\beta)^2$ بوضع : $y=f(x)$ نجد :

$y=2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right]$ منه $y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{8}$; اي $y+\frac{49}{8}=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$ بالتالي :

$\alpha=\frac{49}{8}$ و $\beta=\frac{3}{4}$

ومنه إحداثيتي النقطة A هي : $\left(-\frac{3}{4},\frac{-49}{8}\right)$ في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ وتحصلنا عليها بوضع:

$y+\frac{49}{8}=0$ و $x+\frac{3}{4}=0$

3) معادلات تغير معلم هي : $X=x+\frac{3}{4}$ و $Y=y+\frac{49}{8}$

وباستعمال هذا التغير تصبح معادلة (γ) على الشكل : $Y=2X^2$ في المعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$

4) حل بيانيا المتراجحة : $f(x)\le 0$

حلول المتراجحة : $f(x)\le 0$ هي :

فواصل نقط من المنحني (γ) التي تقع تحت المستقيم ذو المعادلة : $y=0$ ومن الشكل نجد ان هذه الفواصل تنتمي الى المجال : $\left[\frac{-5}{2},1\right]$

إذن مجموعة حلول المتراجحة : $f(x)\le 0$ هي : $s=\left[-\frac{5}{2},1\right]$

4 · المعادلات الصماء

مثال

للستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ، (γ) المنحى البياني للدالة : $f: x\mapsto\sqrt{x-1}$ ، M نقطة من (γ) فاصلتها x والنقطة P مسقطها العمودي على محور الفواصل ، l عدد حقيقي معطى

هل توجد نقط M بحيث : $OP-2PM$ ؟

نحل هذه المسألة حسابيا من اجل $l=1$ ثم نحلها بيانيا في الحالة العامة اي من اجل اي قيمة للعدد l

1) لتكن (x,y) احداثيا النقطة M

- تحقق ان: $y=\sqrt{x-1}$ و $y\geq 0$ و $x\geq 1$

2) استنتج ان حل هذه المسألة يؤول إلى حل المعادلة: $x+2\sqrt{x-1}=l$.......(E)

المعادلة (E) تسمى معادلة صماء لأنها تحتوي على جذر وهذا الجذر لا يمكن تبسيطه

3) من اجل: $l=1$ حل المعادلة (E) جبريا ثم ماذا نستنتج عن وجود النقطة M

4) حل بيانيا المعادلة (E) من اجل اي قيمة للعدد l

✓ الحل :

1) بما أن النقطة $M(x,y)$ تنتمي إلى (γ) فإن: $y=f(x)$

اي: $y=\sqrt{x-1}$ وحتى يكون الجذر معرف يجب ان يكون: $x-1\geq 0$ اي: $x\geq 1$

2) وبما ان $y=\sqrt{x-1}$ فان $y\geq 0$

بما ان: p المسقط العمودي للنقطة M على $(x\ x')$ فان: $x=x_p=x_M$ و $y_p=0$

$$OP=\sqrt{(x_p-x_0)^2+(y_p-y_0)^2}$$

$$OP=\sqrt{(x-0)^2+(0-0)^2}$$

$$OP=\sqrt{x^2}=|x|$$

وبما ان $x\geq 1$ فان: $|x|=x$ ومنه $OP=x$

$$MP=\sqrt{(x_M-x_P)^2+(y_M-y_P)^2}$$

$$PM=\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2}$$

$$PM=\sqrt{y^2}=|y|$$

وبما ان: $y\geq 0$ فإن: $|y|=y$ ومنه $PM=y$ اي: $PM=\sqrt{x-1}$

إذن المعادلة: $OP-2PM=l$ تكتب على الشكل: $x-2\sqrt{x-1}=l$...(E)

إذن وجود النقطة M يتعلق بوجود حلول للمعادلة (E)

3) حل المعادلة (E) من اجل $l=1$

المعادلة (E) تصبح كما يلي: $x-2\sqrt{x-1}=1$

$$x-2\sqrt{x-1}=1.........(E_1)$$

المعادلة (E_1) تكتب على الشكل: $\sqrt{x-1}=\frac{x-1}{2}$

من المساواة: $\sqrt{x-1}=\frac{x-1}{2}$ ينتج: $\begin{cases} x-1=\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 \\ x-1\geq 0\end{cases}$ اي: $\begin{cases}(x-1)=\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 \\ x\geq 1\end{cases}$

المعادلة: $(x-1)=\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$ تكتب على الشكل: $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-(x-1)=0$ وبإخراج $(x-1)$ كعامل مشترك نجد: $(x-1)\left(\frac{x-1}{4}-1\right)=0$ بالتبسيط نجد: $(x-1)\left(\frac{x-5}{4}\right)=0$ ومنه نستنتج: $x=1$ او $x=5$ وبما ان: $1\geq 1$ و $5\geq 1$ فإن المعادلة (E_1) لها حلين: 1 و 5

وبالتالي توجد نقطتين: $M_1(1,0)$ و $M_2(5,2)$ من (γ) بحيث: $OP-2PM=1$

4) حل بيانيا المعادلة (E)

المعادلة (E) تكتب على الشكل $\frac{x-l}{2}=\sqrt{x-1}$ وهذه المعادلة يكون لها معنى إذا وفقط إذا كان: $\frac{x-l}{2}\geq 0$ و $x-1\geq 0$ اي: $x\geq l$ و $x\geq 1$.

وضمن هذا الشرط المساواة: $\frac{x-l}{2}=\sqrt{x-1}$

تكتب على الشكل: $\left(\frac{x-l}{2}\right)^2=x-1$

وبالتبسيط نجد:

$$x^2-2(l+2)x+l^2+4=0.......(E_2)$$

مميز المعادلة (E_2) هو: $\Delta=16l$

إذن إذا كان: $l<0$ فإن المعادلة (E_2) ليس لها حلول وبالتالي النقطة M غير موجودة ، وعليه النقطة M موجودة في حالة $l\geq 0$.

حلول المعادلة (E_2) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (γ) و المستقيم (Δ_l) ذو المعادلة $y=\frac{x-l}{2}$.

- لما $l=0$ فإن: (Δ_0) يقطع (γ) في نقطة $M(2\ ,\ 1)$
- لما $1\geq l>0$ فإن: (Δ_l) يقطع (γ) في نقطتين مختلفتين
- لما $l>1$ فإن المنحنى (γ) يقطع (Δ_l) في نقطة وحيدة .

نتيجة

العادلة الصماء هي كل معادلة تتضمن جذرا لا يمكن تبسيطه .

تمرين تدريبي

حل المعادلة الصماء التالية : $\sqrt{x-4}=x-5$

✓ الحل :

$\sqrt{x-4}=x-5........(E)$

المعادلة (E) لها معنى إذا كان :

$x-4\geq 0$ اي : $x\geq 4$

x	4		5		$+\infty$
$x-5$		-	0	+	

لحل المعادلة (E) ندرس إشارة $(x-5)$ على المجال : $[4\ ,+\infty[$

1) إذا كان : $4\leq x\langle 5$ فإن $x-5$ سالب و $\sqrt{x-4}\ \rangle\ 0$ ومنه المعادلة (E) ليس لها حلول .

2) إذا كان : $x\geq 5$ فإن : $x-5\geq 0$ و $\sqrt{x-4}\geq 0$ ومنه المعادلة (E) تصبح كما يلي :

$(x-4)=(x-5)^2$ بالتبسيط نجد : $x^2-10x+25=x-4$ اي : $x^2-11x+29=0$

$\Delta=11^2-4(1)(29)=121-116=5$

$\Delta\rangle 0$ ومنه المعادلة : $x^2-11x+29=0$ لها حلين : x_1 , x_2

حيث : $x_1=\dfrac{11+\sqrt{5}}{2}$ و $x_2=\dfrac{11-\sqrt{5}}{2}$

بما ان $x_2\langle 5$ فان : x_2 مرفوض وبما ان : $x_1\geq 5$ فان x_1 مقبول وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $s=\left\{\dfrac{11+\sqrt{5}}{2}\right\}$

5 - معادلات ومتراجحات مضاعفة التربيع

1.5 معادلات مضاعفة التربيع

نسمي معادلة مضاعفة التربيع كل معادلة من الشكل : $ax^4+bx^2+c=0$

حيث : $a\neq 0$ و b و c عددا ن حقيقيان .

مثال

كل من المعادلات التالية :

$2x^4+3x^2-1=0\ ,\ x^4-x^2=0\ ,\ -\sqrt{2}x^4+4=0\ ,\ -\frac{1}{2}x^4+\sqrt{3}\,x^2=0$

هي معادلات مضاعفة التربيع .

2.5 حل معادلة مضاعفة التربيع

مثال 1

لتكن المعادلة : $ax^4+bx^2+c=0....(E)$ حيث ، $a\neq 0$

1) بوضع : $t=x^2$ بين ان المعادلة (E) تكتب على الشكل : $at^2+bt+c=0.....(E')$

2) بين انه إذا كان x_0 حلا للمعادلة (E) فان المعادلة $t_0=x^2{}_0$ هو حلا للمعادلة (E') وبالعكس

3) بين انه إذا كان t_0 حلا موجب للمعادلة (E') فان المعادلة (E) لها حلين $x_1=\sqrt{t_0}$ و $x_2=-\sqrt{t_0}$.

✓ الحل :

1) بما ان $t=x^2$ فان ، $t^2=x^4$ ومنه ، $ax^4+bx^2+c=at^2+bt+c$

ومنه المعادلة : $ax^4+bx^2+c=0$ تكتب على الشكل : $at^2+bt+c=0$

2) إذا كان x_0 حلا للمعادلة (E) فان : $ax_0{}^4+bx_0{}^2+c=0$

لكن : $ax_0{}^4+bx_0{}^2+c=at_0{}^2+bt_0+c$ ومنه : $at^2{}_0+bt_0+c=0$ اي : t_0 حلا للمعادلة : $at^2+bt+c=0$.

وبالعكس t_0 حلا للمعادلة (E') تعني ان : $at_0{}^2+bt_0+c=0$

ولكن : $at^2{}_0+bt_0+c=a(x_0{}^2)^2+b(x_0{}^2)+c$

$=ax_0{}^4+bx_0{}^2+c$

وبما ان : $at_0{}^2+bt_0+c=0$ فان : $ax_0{}^4+bx_0+c=0$ و منه : x_0 حلا للمعادلة (E)

3) بما ان : t_0 حلا للمعادلة (E') فان المعادلة : $t_0=x^2$ لها حلين هما :

$x_1=\sqrt{t_0}$ و $x_2=-\sqrt{t_0}$

لاحظ $t_0=x^2$ تكتب على الشكل : $x^2=(\sqrt{t_0})^2$

مثال 2

- حل في IR المعادلتين التاليتين :

1) $x^4-5x^2+4=0.......(E_1)$

2) $2x^4-16x^2-18=0......(E_2)$

✓ الحل :

1) بوضع $t=x^2$ المعادلة : (E_1) تكتب على الشكل : $t^2-5t+4=0..........(E_1')$ مع : $t\geq 0$

مميز المعادلة : (E_1') هو : $\Delta = 9$

بما أن : $\Delta \rangle 0$ فان المعادلة (E_1') لها حلين : t_0 , t_1

حيث : $t_0 = \frac{5+3}{2} = 4$, $t_1 = \frac{5-3}{2} = 1$

- الحالة الأولى : $t_0 = 4$

$x^2 = t_0$ يكافئ : $x^2 = 4$

يكافئ: $(x=2)$ ، أو $(x=-2)$

- الحالة الثانية : $t_1 = 1$

$x^2 = t_1$ يكافئ : $x^2 = 1$

يكافئ : $(x=1)$ أو $(x=-1)$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E_1) هي : $s_1 = \{-1 \ , 1 \ , 2 \ , -2\}$

2) بوضع : $t = x^2$ المعادلة (E_2) تصبح كما يلي :

$$2t^2 - 16t - 18 = 0 ......(E_2)$$

مميز (E_2') هو : $\Delta = 400$

$\Delta \rangle 0$ ومنه المعادلة : (E_2') لها حلين : t_0 , t_1 حيث :

$t_0 = 9$ و $t_1 = -1$

بما أن : $t \rangle 0$ فإن : t_1 مرفوض و t_0 مقبول

$x^2 = t_0$ تكافئ $x^2 = 9$

تكافئ $x = 3$ ، أو $x = -3$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E_2) هي : $s_2 = \{3 \ , -3\}$

3.5 حل متراجحة مضاعفة التربيع

مثال ◆

لنعتبر المتراجحة التالية : $2x^4 - 8x^2 + 6 \leq 0 ....(E)$

- حل في IR المتراجحة (E)

✓ الحل :

لحل المتراجحة (E) نعين إشارة العبارة : $(2x^4 - 8x^2 + 6)$ ثم نحدد مجموعة قيم x التي تحقق (E) .

ولتعين إشارة $(2x^4 - 8x^2 + 6)$ لابد معرفة حلول المعادلة : $2x^4 - 8x^2 + 6 = 0 ....(E')$.

- بوضع : $x^2 = t$ المعادلة (E') تصبح كما يلي : $2t^2 - 8t + 6 = 0 ....(E'')$

مميز المعادلة : (E'') هو $\Delta = 16$.

$\Delta \rangle 0$ ومنه المعادلة (E'') لها حلين هما $t_0 = 3$ و $t_1 = 1$

- من اجل $t = t_0$ نجد : $x^2 = t_0$ أي : $x^2 = 3$ ومنه : $x = \sqrt{3}$ أو : $x = -\sqrt{3}$

- من اجل : $x^2 = t_1$ نجد : $x^2 = t_1$ أي : $x^2 = 1$ ومنه $x = 1$ أو $x = -1$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E') هي : $\{1 \ , -1 \ , \sqrt{3} \ , -\sqrt{3}\}$

لدينا : $2t^2 - 8t + 6 = 2(t - t_0)(t - t_1)$

ومنه : $2x^4 - 8x^2 + 6 = 2(x^2 - 3)(x^2 - 1)$

إشارة $(2x^4 - 8x^2 + 6)$ هي إشارة الجداء $(x^2 - 3)(x^2 - 1)$.

والجدول التالي يلخص إشارة الجداء

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-3		+	0	-	|	-	|	-	0	+	
x^2-1		+	|	+	0	-	0	+	|	+	
$2(x^2-3)(x^2-1)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

من الجدول السابق نستنتج ان : $2x^4 - 8x^2 + 6 \leq 0$ إذا وفقط إذا كان x ينتمي إلى :

$$[1 \ , \sqrt{3}] \cup [-\sqrt{3} \ , -1]$$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (E) هي : $x = [-\sqrt{3} \ , -1] \cup [1 \ , \sqrt{3}]$

تمرين تدريبي

نعتبر المعادلتين التاليتين :

$$2x^4 - 10x^2 + 8 = 0 ....(E)$$

$$2z^4 + 8z^3 + 2z^2 - 12z = 0 ....(E')$$

1) بوضع : $z = x - 1$ بين أن : المعادلة (E) تكافئ المعادلة (E')

2) حل في IR المعادلة (E) ثم استنتج مجموعة حلول المعادلة (E')

✓ الحل :

1) من المساواة : $Z = x - 1$ نجد : $x = Z + 1$ بتعويض عبارة x في العبارة $(2x^4 - 10x^2 + 8)$ نجد

$$2x^4 - 10x^2 + 8 = 2(Z+1)^4 - 10(Z+1)^2 + 8$$
$$= 2(Z^4 + 4Z^3 + 6Z^2 + 4Z + 1) - 10(Z^2 + 2Z + 1) + 8$$
$$= 2Z^4 + 8Z^3 + 12Z^2 + 8Z + 2 - 10Z^2 - 20Z - 10 + 8$$
$$= 2Z^4 + 8Z^3 + 2Z^2 - 12Z$$

إذا المعادلة : $2x^4-10x^2+8=0$ تكافئ : $2Z^4+8Z^3+2Z^2-12Z=0$

ومنه المعادلتين : (E) و (E') متكافئتين اي ان إذا كان x_0 حلا لـ (E) ،
فان Z_0 حلا لـ (E') والعكس صحيح

2) - حل المعادلة (E)

بوضع $x^2=t$ المعادلة (E) تكتب على الشكل : $2t^2-10t+8=0$

مميز المعادلة : $2t^2-10t+8=0$ هو : $\Delta=10^2-4(2)(8)=36$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة : $2t^2-10t+8=0$ لها حلين : $t_0=4$ و $t_1=1$

- إذا كان : $t=t_0$

$x^2=4$ إذا وفقط إذا كان $(x=2)$ او $(x=-2)$

- إذا كان : $t=t_1$

$x^2=1$ إذا وفقط إذا كان : $(x=1)$ او $(x=-1)$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $s=\{1\ ,\ 2\ ,\ -1\ ,\ -2\}$

* استنتاج حلول المعادلة (E')

لدينا : $Z=x-1$ إذن

- إذا كان : $x=1$ فان $Z=0$
- إذا كان : $x=2$ ، فان $Z=1$
- إذا كان : $x=-1$ فان ، $Z=-2$
- إذا كان : $x=-2$ ، فان $Z=-3$

بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E') هي : $s'=\{0\ ,\ 1\ ,\ -2\ ,\ -3\}$.

تطبيقات نموذجية

تطبيق - 1 : حل معادلات من الدرجة الثانية

- حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المعادلات التالية :

1) $3x^2-3(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+3\sqrt{6}=0$

2) $x^2+0,5x-1,5=0$

3) $u^2-7u-8=0$

الحل :

1)

$$\Delta=\left[3(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right]^2-4(3)(3\sqrt{6})$$
$$=9(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-36\sqrt{6}=9(2+3+2\sqrt{6})-36\sqrt{6}$$
$$=45+18\sqrt{6}-36\sqrt{6}\ =45-18\sqrt{6}$$
$$=9(5-2\sqrt{6})=3^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

منه : $\sqrt{\Delta}=3(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة لها حلين : x_0 ، x_1 حيث:

$$x_0=\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{3})+3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}=\sqrt{3}\quad ،\quad x_1=\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{3})-3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}=\sqrt{2}$$

ومنه مجوعة حلول المعادلة المعطاة هي : $S_1=\{\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{3}\}$

2)

$$\Delta=(0,5)^2-4(1)-(1,5)=0,25+6=\frac{25}{100}+6=\frac{625}{100}=\left(\frac{25}{10}\right)^2$$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة المعطاة لها حلين : x_0 ، x_1 حيث :

$$x_0=\frac{-0,5+2,5}{2}=1\quad ،\quad x_1=\frac{-0,5-2,5}{2}=-\frac{3}{2}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة المعطاة هي : $s_2=\left\{1\ ,\ \frac{-3}{2}\right\}$

3)

$$u^2-7u-8=0$$
$$\Delta=(-7)^2-4(1)(-8)=81$$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة المعطاة لها حلين هما : u_1 , u_0

حيث : $u_0=\frac{7+9}{2}=8$ ، $u_1=\frac{7-9}{2}=-1$

ومنه مجموعة حلول المعادلة المعطاة هي : $s_3=\{-1 , 8\}$

تطبيق . 2 : حل معادلة من الدرجة الثانية بمعرفة احد حليها

1) تحقق ان العدد 2 هو حلا للمعادلة : $2x^2-5x+2=0....(E)$

2) ما هو مجموع جذري المعادلة (E) ؟ وما هو جداءهما ثم استنتج الجذر الثاني للمعادلة (E)

الحل :

1) $2(2)^2-5(2)+2=2\times4-10+2=8-10+2=0$

منه العدد 2 هو جذرا للمعادلة (E)

2) ليكن : x_1 , x_0 جذري المعادلة (E) منه : $x_0+x_1=\frac{-b}{a}$ و $x_1 x_0=\frac{c}{a}$ حيث : $a=2$ و $b=-5$ و $c=2$ ومنه : $x_0+x_1=\frac{5}{2}$ و $x_1 x_0=1$

- استنتاج الجذر الثاني :

لدينا : $x_0+x_1=\frac{5}{2}$ ومنه : $x_1=\frac{5}{2}-x_0$ وبالتعويض نجد : $x_1=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$

تطبيق . 3 : معادلة من الدرجة الثانية ذات معاملات كيفية

1) كيف نختار العدد الحقيقي m حتى يكون العدد 1 جذرا للمعادلة :

$x^2+mx+3=0......(E)$

2) من اجل قيمة m المحصل عليها في السؤال 1)

عين الجذر الثاني للمعادلة (E).

الحل :

1) 1 جذرا للمعادلة (E) هذا معناه ان : $1^2+m\times1+3=0$ بالتبسيط نجد : $m+4=0$

اي : $m=-4$.

2) من اجل $m=-4$ نرمز بـ : x_0 ، x_1 لجذري المعادلة (E) منه : $x_0+x_1=\frac{-b}{a}$

و بتعويض a و b نجد : $x_0+x_1=4$

منه : $x_1=\frac{-b}{a}-x_0=\frac{4}{1}-1=4-1=3$

إذن في حالة : $m=-4$ المعادلة (E) لها حلين هما : 1 و 3

تطبيق . 4 : حل معادلة من الدرجة الثانية و سيطية

نعتبر المعادلة ذات المجهول x التالية :

$-2x^2-mx+2-m=0.........(E)$ حيث : m عدد حقيقي معطى

1) عين قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) جذرا مضاعف ثم احسبه

2) ما هي قيم m حتى تقبل المعادلة (E) جذرين مختلفين في الإشارة

3) ما هي قيم m حتى تقبل المعادلة (E) جذرين موجبين

4) ما هي قيم m حتى تقبل المعادلة (E) جذرين سالبين

الحل :

1) حتى تقبل المعادلة (E) جذر مضاعف يجب ان يكون : $\Delta=0$.

$\Delta=(-m)^2-4(-2)(2-m)=m^2-8m+16=(m-4)^2$

$\Delta=0$ إذا وفقط إذا كان : $(m-4)^2=0$ اي : $m-4=0$ ومنه : $m=4$

وفي هذه الحالة الجذر المضاعف هو : $x=\frac{-b}{2a}$.

بالتعويض قيمة a و b نجد : $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-m)}{-4}=\frac{m}{-4}=\frac{4}{-4}=-1$

2) حتى تقبل المعادلة (E) جذرين مختلفين في الإشارة يجب ان يكون : $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}<0$

• $\Delta>0$ إذا وفقط إذا : $(m-4)^2>0$ اي : $m\neq4$

$\frac{c}{a}<0$ إذا وفقط إذا كان : $\frac{2-m}{-2}<0$ اي : $2-m>0$ ومنه : $m<2$

$m\neq4$ و $m<2$ تكافئ : $m\in]-\infty ,2[$

ومنه مجموعة قيم m المطلوبة هي : $]-\infty ,2[$

3) حتى تقبل المعادلة (E) جذرين موجبين يجب ان يكون : $\Delta>0$ و $\frac{-b}{a}>0$ و $\frac{c}{a}>0$

$\Delta>0$ تكافئ : $m\neq4........(1)$

$\frac{c}{a}>0$ تكافئ : $m>2........(2)$

$\frac{-b}{a} > 0$ تكافئ (3).......$m < 0$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أنه لا توجد اي قيمة لـ m تحقق الشروط الثلاثة السابقة
ومنه مجموعة قيم m هي: ϕ أي ان: المعادلة (E) لا تقبل جذرين موجبين معا

4) حتى تقبل المعادلة (E) جذرين سالبين معا يجب ان يكون:

$\Delta > 0$ و $\frac{-b}{a} < 0$ و $\frac{c}{a} > 0$.

$\Delta > 0$ تكافئ: $m \neq 4$

$\frac{-b}{a} < 0$ تكافئ: $m > 0$

$\frac{c}{a} > 0$ تكافئ: $m > 2$

و منه مجموعة قيم m التي تحقق الشروط الثلاثة هي: $]2, 4[\cup]4, +\infty[$

تطبيق 5: المعادلتين المتكافئتين

1) لتكن المعادلتين: $ax^2+bx+c=0$........(E) و $a'x^2+b'x+c'=0$ ....(E')
حيث: a, b, c, a', b', c' اعداد حقيقية: $a\neq0$ و $b\neq0$ و $a'\neq0$ و $b'\neq0$
عين الشرط اللازم والكافي الذي تحققه: a, b, c, a', b', c' حتى يكون للمعادلتين (E) و (E') نفس الحلول
2) عين العددين: m و n بحيث المعادلتين:
$x^2-(m+1)x+m-n=0$.....(1) ، $3x^2-(m+7)x-n=0$.....(2)
لهما نفس الحلول ثم عين في هذه الحالة هذه الحلول

الحل:

1) نفرض ان المعادلتين: (E) و (E') لهما نفس الحلين x_0 , x_1 بالتالي فان:

$x_0+x_1=\frac{-b}{a}$ ومن جهة اخرى: $x+x_1=\frac{-b'}{a'}$ كذلك $x_0x_1=\frac{c}{a}$ و $x_0x_1=\frac{c'}{a'}$

و عليه ينتج: $\frac{-b}{a}=-\frac{b'}{a'}$ و $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$ بالتبسيط نجد: $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$ و $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$

منه ينتج: $\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$ و $\frac{c}{c'}=\frac{a}{a'}$.

- نفرض ان: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ و ان المعادلة $ax^2+bx+c=0$ لها حلين: x_0 , x_1

و نبين ان المعادلة: $a'x^2+b'x+c'=0$ لها نفس الحلول: x_0 , x_1

نضع: $\frac{a}{a'}=\alpha$ منه نجد: $a'=\alpha a$ و $b'=\alpha b$ و $c'=\alpha c$ حيث: $\alpha\neq0$

المعادلة: $a'x^2+b'x+c'=0$ تكتب على الشكل: $\alpha ax^2+\alpha bx+\alpha c=0$

منه: $\alpha\left(ax^2+bx+c\right)=0$ وبما ان: $\alpha\neq0$ فان: $ax^2+bx+c=0$

إذن إذا كان: x_0 , x_1 حلان للمعادلة: $ax^2+bx+c=0$ و $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\alpha$ فإن:

x_0 , x_1 كذلك حلين للمعادلة: $a'x^2+b'x+c'=0$

2) المعادلتان لهما نفس الحلول إذا وفقط إذا كان:

$\frac{m-n}{-n}=\frac{-(m+1)}{-(m+7)}=\frac{1}{3}$ منه ينتج: $\frac{m+1}{m+7}=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}=\frac{m+1}{m+7}$ تكافئ: $3m+3=m+7$ تكافئ $m=2$

$\frac{1}{3}=\frac{m-n}{-n}$ تكافئ: $3m-3n=-n$ تكافئ $n=3$

إذا حتى يكون للمعادلتين (1) و (2) نفس الحلول يجب ان يكون: $m=2$ و $n=3$

- من اجل: $m=3$ و $n=3$

المعادلة (2) تصبح كما يلي: $3x^2-9x-3=0$

$\Delta=81-4(3)(-3)=81+36=121$

$x_0=\frac{9+11}{6}=\frac{10}{3}$ و $x_1=\frac{9-11}{6}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$

تطبيق 6: تحليل ثلاثي حدود وتعيين إشارته

لتكن ثلاثيات الحدود التالية:
أ) $f(x)=3x^2-3x-6$
ب) $f(x)=4x^2+x-18$
ج) $f(x)=2x^2-24x-26$
1) حلل كثيرات الحلول المعطاة ثم عين إشارة كل منها
2) حل في IR المتراجحة: $f(x) > 0$ في كل حالة من الحالات السابقة.

الحل:

1) أ) $f(x)=3x^2-3x-6$

$\Delta=9-(4)(3)(-6)=(81)$

$\Delta > 0$ ومنه $f(x)$ له جذرين هما: x_0 , x_1 حيث: $x_0=2$ ، $x_1=-1$

منه: $f(x)=3(x-2)(x+1)$

- إشارة $f(x)$ مدونة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

ب) $f(x)=4x^2-x-18$

$\Delta=1-4(4)(-18)=289$

$\Delta>0$ ومنه: $f(x)$ له جذرين هما: x_0 , x_1 حيث: $x_0=\frac{9}{4}$ ، $x_1=-2$

منه: $f(x)=4\left(x-\frac{9}{4}\right)(x+2)$

- إشارة $f(x)$ مدونة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-2		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

ج) $f(x)=2x^2-24x-26$

$\Delta=(24)^2-4(2)(-26)$ منه: $\Delta=176+208$ منه: $\Delta=784$

$\Delta>0$ ومنه $f(x)$ له جذرين هما x_0 , x_1 حيث:

$x_0=\frac{24+28}{4}=13$ ، $x_1=\frac{24-28}{4}=-1$ وبالتالي: $f(x)=2(x+1)(x-13)$

- إشارة $f(x)$ مدونة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-1		$+13$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

حل المتراجحة: $f(x)<0$

2) ا) حالة: $f(x)=3x^2-3x-6$: من جدول إشارة $f(x)$ نستنتج أن مجموعة قيم x التي تحقق: $f(x)<0$ هي: $]-1,2[$

ب) حالة: $f(x)=4x^2+x-18$

من جدول إشارة $f(x)$ نستنتج ان مجموعة قيم x التي تحقق $f(x)<0$ هي $]-2,\frac{9}{4}[$.

ج) حالة: $f(x)=2x^2-24x-26$

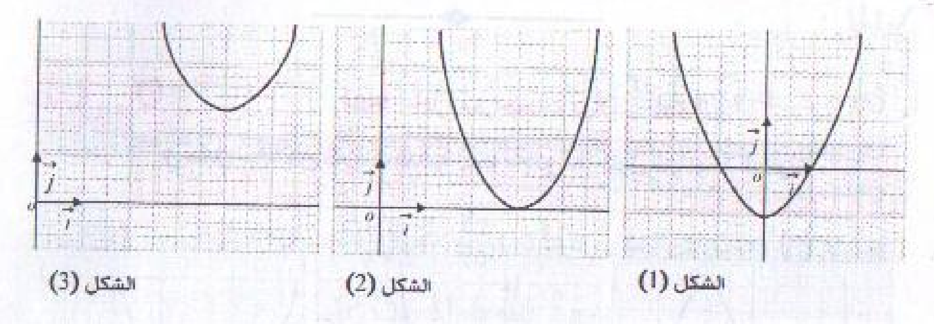
من جدول إشارة $f(x)$ نستنتج ان مجموعة قيم x التي تحقق: $f(x)<0$ هي: $]-1,13[$.

تطبيق 7: تعيين إشارة a و Δ بيانيا

الأشكال التالية تمثل بيانات لدوال ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

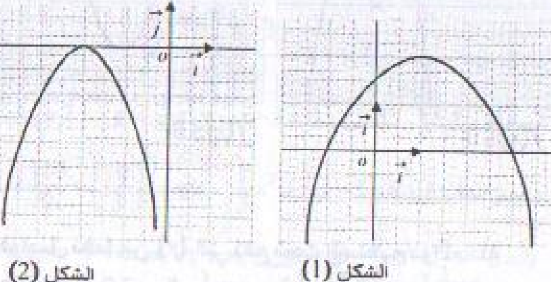
- عين إشارة المميز وإشارة a (a هو معامل x^2) في كل حالة من الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى:



الشكل (1) الشكل (2) الشكل (3)

الحالة الثانية:



الشكل (1) الشكل (2) الشكل (3)

الحل:

الحالة الأولى:

- في الشكل (1) المنحنى مشدود نحو الأعلى وبالتالي إشارة a موجبة تماما وبما أن المنحى (γ) يقطع $(x\ x')$ في نقطتين فإن: $\Delta>0$

- في الشكل (2) المنحى مشدود نحو الأعلى وبالتالي إشارة a موجبة وبما أن المنحى (γ) يقطع مرة واحدة $(x\ x')$ فإن: $\Delta=0$

- في الشكل (3) المنحى مشدود نحو الأعلى وبالتالي إشارة a موجبة وبما أن (γ) لا يقطع $(x\ x')$ فإن: $\Delta<0$

□ الحالة الثانية :

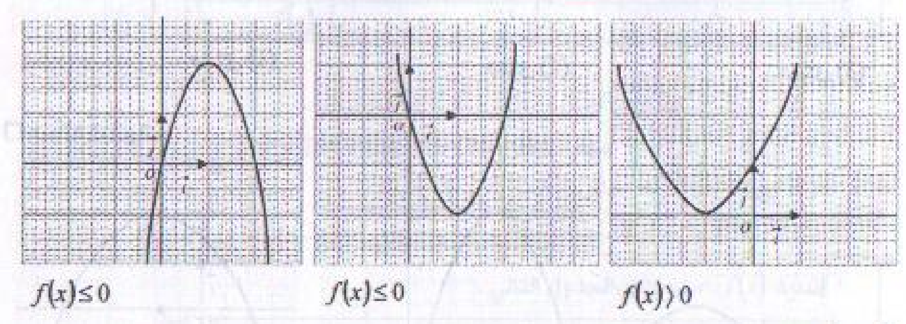
- في الشكل (1) المنحى (γ) مشدود نحو الأسفل وبالتالي إشارة a سالبة وبما ان (γ) يقطع $(x\ ,\ x)$ في نقطتين فإن : $\Delta > 0$

- في الشكل (2) المنحى (γ) مشدود نحو الأسفل بالتالي إشارة a سالبة وبما ان (γ) يقطع $(x\ x')$ في نقطة واحدة فإن : $\Delta = 0$

- في الشكل : (3) المنحى (γ) مشدود نحو الأسفل بالتالي $a < 0$ وبما ان (γ) لا يقطع : $(x\ x')$ فإن : $\Delta < 0$

تطبيق . 8 : حل متراجحات بيانيا

في كل حالة من الحالات التالية أعط مجموعة حلول المتراجحة المطلوبة :



$f(x) > 0$ $f(x) \le 0$ $f(x) \le 0$

✓ الحل :

1) حلول المتراجحة $f(x) \le 0$ هي فواصل نقط من (γ) التي تقع تحت المستقيم ذوا لمعادلة $y = 0$ ، ومن الشكل نجد أن هذه الفواصل تنتمي إلى $]-\infty, 0] \cup [2\ , +\infty[$ بالتالي مجموعة حلول المتراجحة : $f(x) \le 0$ هي : $s_1 =]-\infty, 0] \cup [2\ , +\infty[$

2) حلول المتراجحة $f(x) \le 0$ هي فواصل نقط من (γ) التي تقع تحت المستقيم ذوا لمعادلة $y = 0$ ، ومن الشكل نجد أن هذه الفواصل تنتمي إلى $[0\ , 2]$ وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \le 0$ هي $s_2 = [0\ , 2]$

3) حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي فواصل نقط تقاطع (γ) مع $(x\ x')$ ، ومن الشكل نجد أن هذه الفواصل تنتمي إلى IR ومنه مجموعة حلول المتراجحة : $f(x) > 0$ هي : IR .

تطبيق . 9 : حل معادلات ناطقة

حل في مجموعة الأعداد الحقيقية IR المعادلتين التاليتين :

1) $\dfrac{x^2+3x-5}{x+2} = \dfrac{2}{3}x - 1 ....(E)$

2) $\dfrac{x+2}{x-1} + \dfrac{2x+1}{x+2} = \dfrac{39}{10} ....(E')$

✓ الحل :

1) $$\frac{x^2+3x-5}{x+2} = \frac{2}{3}x - 1 ....(E)$$

لكي يكون للمعادلة (E) معنى يجب ان يكون ، $x+2 \neq 0$ اي ، $x \neq -2$ ومنه الحلول ان وجدت فهي من المجموعة $IR - \{-2\}$

المعادلة (E) تكتب على الشكل : $\dfrac{x^2+3x-5}{x+2} - \left(\dfrac{2}{3}x - 1\right) = 0$

بتوحيد المقامات نجد : $\dfrac{(x^2+3x-5) - (x+2)\left(\dfrac{2}{3}x - 1\right)}{x+2} = 0$

بالتبسيط نجد : $\dfrac{\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 3}{x+2} = 0 .....(E_1)$

المعادلة : (E_1) تكافئ : $\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 3 = 0$ و $x \in IR - \{-2\}$

مميز المعادلة : $\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 3 = 0$ هو : $\Delta = \dfrac{100}{9} = \left(\dfrac{10}{3}\right)^2$ ومنه المعادلة ،

$\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 3 = 0$ لها حلين : $x_0\ , x_1$ حيث : $x_0 = -9$ ، $x_1 = 1$

بما ان : $x_0 \neq -2$ و $x_1 \neq -2$ فإن مجموعة حلول المعادلة (E_1) هي : $\{-9 , 1\}$

•

2) $$\frac{x+2}{x-1} + \frac{2x+1}{x+2} = \frac{39}{10} ....(E')$$

المعادلة (E') لها معنى إذا وفقط إذا : $x-1 \neq 0$ و $x+2 \neq 0$ اي : $x \neq 1$ و $x \neq -2$

ومنه حلول المعادلة (E') ان وجدت فهي من المجموعة : $IR - \{1 , -2\}$

المعادلة (E') تكتب على الشكل : $\dfrac{(x+2)^2 + (x-1)(2x+1)}{(x-1)\ (x+2)} = \dfrac{39}{10}$

بالتبسيط نجد : $\dfrac{3x^2+3x+3}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{39}{10}$

ومنه ينتج : $39(x-1)(x+2)=30x^2+30x+30$

بالتبسيط نجد : $9x^2+9x-108=0$

ومميز هذه المعادلة هو : $\Delta=3909$

بما أن : $\Delta \rangle 0$ فإن المعادلة : $9x^2+9x=108=0$ لها حلين x_1 , x_0

حيث: $x_0=\frac{-9+\sqrt{\Delta}}{18}$ و $x_1=\frac{-9-\sqrt{\Delta}}{18}$

تطبيق - 10 :

لتكن المعادلة : $(x^2+x+1)^2-4x^2-4x-1=0......(E)$

1) بالتعويض : $x^2+x=t$ في المعادلة (E) نتحصل على معادلة (E_1) يطلب حلها

2) من اجل كل α حل للمعادلة (E_1) حل المعادلة $U(x)=\alpha$ حيث $U(x)=t$

3) نرمز ب : $f(x)$ إلى الطرف الأول من المعادلة (E) و $g(x)$ إلى الطرف الأول في المعادلة (E_1) و $U(x)=x^2+x$

أ) تحقق أن : $f(x)=g\left[u(x)\right]$ من اجل كل x من IR

ب) استنتج حلول المعادلة $f(x)=0$

✓ الحل :

1) المعادلة (E) تكتب على الشكل التالي :

$$(x+x+1)^2-4x^2-4x-1=\left[(x^2+x)+1\right]^2-4(x^2+x)-1$$
$$=(t+1)^2-4t-1=t^2-2t$$

إذن : $t^2-2t=0......(E_1)$

المعادلة (E_1) لها حلين هما : 0 , 2

2) حل المعادلة : $U(x)=\alpha$

- من اجل $\alpha=0$

المعادلة : $U(x)=0$ هي : $x^2+x=0$ وحلي هذه المعادلة هما : 1- و 0

- من اجل : $\alpha=2$

المعادلة : $U(x)=2$ هي $x^2+x=2$ وتكتب على الشكل : $x^2+x-2=0$ وحلي هذه المعادلة هما 1 و 2- .

3) أ) $g(u(x))=(u(x))^2-2u(x)$

$$=(x^2+x)^2-2(x^2+x)$$
$$=(x^2+x)^2+2(x^2+x)-4(x^2+x)+1-1$$
$$=\left[(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1\right]-4(x^2+x)-1$$
$$=(x^2+x+1)^2-4(x^2+x)-1 \;=f(x)$$

ب) حل المعادلة $f(x)=0$ يؤول إلى حل المعادلة $g(u(x))=0$ ومن السؤال الأول وجدنا الحلول α التي تحقق $g(\alpha)=0$ ومن السؤال الثاني عينا كل قيم x بحيث : $u(x)=\alpha$ التي هي حلول المعادلة : $f(x)=0$ ومنه نستنتج أن مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي :

$\{0\,,1\,,-1\,,2\}$

تمارين و مسائل

1 - حل في IR المعادلات التالية :

1) $-3x^2+3\left(1+\sqrt{2}\right)x-3\sqrt{2}=0$

2) $2x^2-0{,}6x+0{,}04=0$

3) $u^2-24u+144=0$.

2 1) تحقق ان العدد (-1) هو حلا للمعادلة : $-3x^2+2x+5=0$.........(E)

2) ما هو مجموع جذري المعادلة (E) ؟ وما هو جداؤهما ثم استنتج الجذر الثاني للمعادلة (E).

3 - كيف نختار العدد الحقيقي m حتى يكون العدد (-2) جذرا للمعادلة : $x^2-\left(1+m\right)x+2m-1=0$ ثم استنتج عندئذ الجذر الثاني .

4 - نعتبر المعادلة ذات المجهول x التالية : $x^2-\left(m+1\right)x+\frac{5}{4}m-\frac{1}{4}=0$.....(E)

حيث : m عدد حقيقي معطى .

1) عين قيم m حتى تقبل المعادلة (E) جذرا مضاعفا ثم احسبه

2) ما هي قيم m حتى تقبل المعادلة (E) جذرين موجبين

3) ما هي قيم m حتى تقبل المعادلة (E) حلين مختلفين في الإشارة

4) ما هي قيم m حتى تقبل المعادلة (E) جذرين سالبين

5) ما هي قيم m حتى لا تقبل المعادلة (E) جذورا .

5 - عين العدد الحقيقي m و n بحيث المعادلتين التاليتين لهما نفس الحلول

$x^2-2mx+2m-3n=0$......(E)

$3x^2-\left(2m+6\right)x+1-3n=0$.....$(E')$

6 - لتكن ثلاثيات الحدود التالية :

1) $f(x)=2x^2+x-4$

2) $f(x)=3x^2-2x-5$

3) $f(x)=-2x^2+2\sqrt{2}x+2-2\sqrt{2}$

1) حلل كثير الحدود $f(x)$ إلى جداء عوامل ثم عين إشارته

2) حل في IR المتراجحات التالية : $f(x)\le 0$, $f(x)>0$.

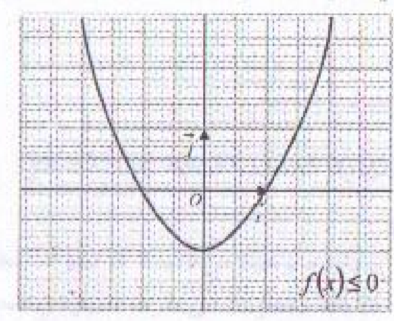
7 1) حل في IR المتراجحتين :

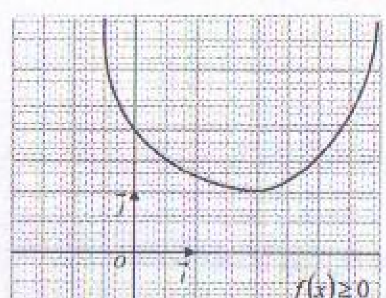
$x^2+3x+2>0$ .....(1)

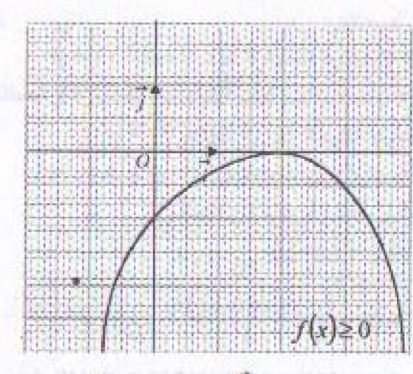
$x^2+3x<0$ .....(2)

2) استنتج مجموعة حلول المتراجحة : $-1<x^2+3x+1<1$.

8 - في كل حالة من الحالات التالية أعط مجموعة حلول المتراجحة المطلوبة







9 - لتكن $f(x)$ ثلاثي حدود من الدرجة الثانية $f(x)=x^2-mx+3$ حيث m عدد حقيقي معطى

1) عين مجموعة قيم m بحيث من اجل كل x من IR : $f(x)>0$

2) من اجل اي قيمة للعدد m بحيث يكون لـ $f(x)$ جذرا مضاعفا ثم عينه

3) من اجل اي قيمة للعدد m بحيث يكون لـ : $f(x)$ جذرين مجموعهما 5

4) هل توجد قيمة للعدد m بحيث يكون لـ : $f(x)$ جذرين احدهم مقلوب الأخر

10 - نعتبر المعادلة : $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-\frac{5x}{2x+2}+1=0 ......(E)$

1) بتعويض : $\frac{x}{x+1}=t$ في المعادلة (E) نتحصل على معادلة (E_1) يطلب حلها

2) من اجل كل α حل للمعادلة (E_1) حل المعادلة $u(x)=\alpha$ حيث : $u(x)=\frac{x}{x+1}$

3) تحقق ان $f(x)=[g(u(x))]$ من اجل كل : $x\in IR-\{-1\}$

ثم استنتج مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$

الدرس : 3

الاشتقاق

1 - العدد المشتق

1.1 النهاية العددية لدالة عند الصفر

مثال 1

سيارة متوجهة من المدينة A نحو المدينة B التي تبعد بمسافة $100\ km$ ، حيث المسافة المقطوعة من طرف السيارة في اللحظة t معطاة بالعبارة : $d(t)=10t^2$

حيث t بالثانية و d بالمتر

لتكن $V(1)$ السرعة اللحظية للسيارة عند اللحظة $t_0=1s$

ولحساب $V(1)$ نقوم بحساب السرعات المتوسطة للسيارة في لحظات قريبة من $1s$ وهذه السرعات تعطينا القيمة المقربة للعدد $V(1)$.

السرعة المتوسطة للسيارة بين اللحظتين $t_0=1$ و $t=1+h$

حيث : h عدد صغير جدا وقريب من الصفر

تعطى بالعلاقة : $\frac{d(1+h)-d(1)}{h}$ مع $h\neq 0$

1) تحقق ان : $\frac{d(1+h)-d(1)}{h}=20+10h$ مع $h\neq 0$

2) أوجد السرعات المتوسطة للسيارة الموافقة لقيم h التالية :

$-0{,}00001\ ,\ -0{,}0001\ ,\ -0{,}001\ ,\ 0{,}0000\ ,\ 0{,}0001,\ 0{,}001$ ثم ماذا تستنتج

3) استنتج ان $V(1)$ هي نهاية $\frac{d(1+h)-d(1)}{h}$ لما h يقترب من الصفر ثم احسب $V(1)$.

✓ **الحل :**

1) $\frac{d(1+h)-d(1)}{h}=\frac{10(1+h)^2-10\times 1^2}{h}=\frac{10\left[(1+h)^2-1^2\right]}{h}$

$=\frac{10(1+h-1)(1+h+1)}{h}=\frac{10(2+h)}{h}\times h \quad =20+10h$

2)

قيم h	0,001	0,0001	0,00001	-0,00001	-0,0001	-0,001
السرعة المتوسطة	20,01	20,001	20,0001	19,9999	19,999	19,99

نستنتج من القيم السرعات المتوسطة المحصل عليها سابقا انه كلما اقترب h من الصفر فإن السرعة المتوسطة تقترب من قيمة $V(1)$.

3) بما ان السرعات المتوسطة تقرب من القيمة 20 كلما اقترب h من الصفر فإن السرعة اللحظية $V(1)$ هي نهاية النسبية : $\frac{d(1+h)-d(1)}{h}$ لما h تقترب من الصفر وعليه فإن : $V(1)=20+10\times 0+20$ ، وبالتالي لمعرفة السرعة اللحظية عند اللحظة t_0 نحسب نهاية الدالة : $h \mapsto \frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$ لما h يؤول (يقترب) من الصفر .

مثال 2

الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x)=\frac{(x+2)^2-4}{x}$

مجموعة تعريفها هي : $IR-\{0\}$.

$f(0)$ غير موجود لكن $f(x)$ نستطيع حسابه من اجل كل قيم x التي تكون قريبة من الصفر (بجوار الصفر) ، وهنا نتساءل كيف تصبح $f(x)$ لما x تقترب من الصفر فمثلا لما x تنتمي إلى المجال : $]-0{,}001\ ,\ 0{,}001[$ ما عدا الصفر ،

وللإجابة عن هذا السؤال نقوم بدارسة نهاية الدالة f عند الصفر .

من اجل كل x تختلف عن الصفر : $f(x)=x+4$ ،

إذن عندما يأخذ x قيم قريبة من الصفر فإن $(x+4)$ تقترب من القيمة 4 اي : $f(x)$ تاخذ قيمها من المجال : $[4-\alpha, 4+\alpha]$ حيث : α عدد حقيقي موجب وصغير جدا .

ونقول عندئذ 4 هي نهاية f عند الصفر

وتكتب : $\lim_{x\to 0} f(x)=4$

نتيجة

f دالة بحيث الصفر تنتمي إلى مجموعة تعريفها D_f أو حدا لـ D_f

القول ان الدالة f تقبل نهاية l عند الصفر هذا يعني انه عندما x يأخذ قيم قريبة شيئا فشيئا من الصفر العدد $f(x)$ يقترب شيئا فشيئا من l اي $f(x)$ يكون محصورا بين : $l-\alpha$ ، $l+\alpha$ حيث : $\alpha \rangle 0$ وصغير جدا ونكتب : $\lim_{x\to 0} f(x)=l$

نظريات

1) $\lim_{x\mapsto 0}\sqrt{x}=0$ ، $\lim_{x\mapsto 0}x^2=0$ ، $\lim_{x\mapsto 0}x^n=0$ حيث : $n\in N^*$

2) إذا كانت P دالة كثير حدود فإن $\lim_{x\mapsto 0} p(x)=p(0)$

3) إذا كانت f دالة ناطقة معرفة عند الصفر فإن : $\lim_{x\mapsto 0} f(x)=f(0)$

4) إذا كانت P كثير حدود و f دالة ناطقة معرفة وموجبة في جوار الصفر فإن : $\lim_{x\mapsto 0}\sqrt{p(x)}=\sqrt{p(0)}$ ، $\lim_{x\mapsto 0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(0)}$

5) إذا كانت $\lim_{x\mapsto 0} f(x)=l$ و $\lim_{x\mapsto 0} g(x)=l'$

فإن : $\lim_{x\mapsto 0} f(x)\,g(x)=l\,l'$ و $\lim_{x\mapsto 0}(f(x)+g(x))=l+l'$

وإذا كان : $l'\neq 0$ فإن : $\lim_{x\mapsto 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{l'}$

مثال

لتكن الدالتين f و g المعرفتين كما يلي :

$f(x)=1-x^2$ ، $g(x)=2x^2+3x+2$

- احسب ما يلي : $\lim_{x\mapsto 0} f(x)$ ، $\lim_{x\mapsto 0} g(x)$ ، $\lim_{x\mapsto 0}\sqrt{f(x)}$ ، $\lim_{x\mapsto 0} f(x)g(x)$

$\lim_{x\mapsto 0} f(x)+g(x)$ ، $\lim_{x\mapsto 0}\frac{f(x)}{g(x)}$

✓ **الحل :**

$\lim_{x\mapsto 0} f(x)=\lim_{x\mapsto 0}\left(1-x^2\right)=f(0)=1=l$

$\lim_{x\mapsto 0} g(x)=\lim_{x\mapsto 0}\left(2x^2+3x+2\right)=g(0)=2=l'$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(0)}=\sqrt{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)\,g(x)=f(0)\times g(0)=1\times 2=2$$

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=f(0)+g(0)=1+2=3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(0)}{g(0)}=\frac{2}{1}=2$$

2.1 قابلية اشتقاق دالة عند عدد والعدد المشتق :

f دالة معرفة على D_f و $x_0\in D_f$

f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 إذا وفقط إذا كانت الدالة : $h\mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

تقبل نهاية l لما h يؤول إلى الصفر والعدد l يسمى بالعدد المشتق للدالة f عند العدد x_0

ونرمز له ب: $f'(x_0)$.

ملاحظة 1

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 و $f'(x_0)$ عددها المشتق فإننا نكتب:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ملاحظة 2

العدد $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ يدعى نسبة تغير الدالة f بين العددين : x_0+h و x_0

حيث : h عدد حقيقي غير معدوم و x_0+h ينتمي الى D_f .

مثال

لتكن f دالة معرفة بالعبارة : $f(x)=2x^2+1$ هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0=2$.

الحل :

الدالة f معرفة على $D_f=IR$ و $x_0\in IR$

من اجل كل $h\neq 0$ لدينا :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\left(2(2+h)^2+1\right)-\left(2\times 2^2+1\right)}{h}=\frac{\left(2\left(4+4h+h^2\right)+1\right)-9}{h}$$

$$=\frac{8h+2h^2}{h}=8+2h$$

إذن ، $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}(8+2h)=8$

و منه الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد : $x_0=2$ وعددها المشتق هو $f'(2)=8$.

تمرين تدريبي

f دالة معرفة كما يلي : $f:x\mapsto x^2$

1) برهن ان الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 حيث : x_0 عدد من D_f ثم احسب : $f'(x_0)$

2) احسب : $f'(0)\,,\ f'(2),\ f'(1)\,,\ f'(-1)$

الحل :

1) نسبة تزايد الدالة f بين : x_0 و x_0+h هي : $t(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

وبما ان : $f(x)=x^2$ فإن : $t(h)=\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}$

$$=\frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h}=\frac{2x_0h+h^2}{h}$$

$$=\frac{h(2x_0+h)}{h}=2x_0+h$$

(لأن : $h\neq 0$)

إذن : $\lim_{h\to 0} t(h)=\lim_{h\to 0}(2x_0+h)=2x_0$

منه الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 والعدد المشتق هو : $f'(x_0)=2x_0$

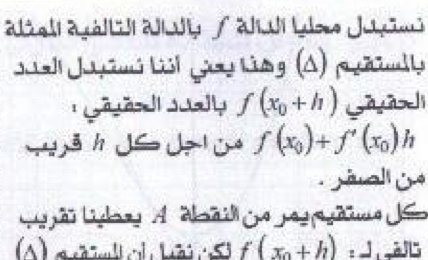
2) $f'(1)=2\times 1=2\ ,\ f'(-1)=-2\ ,\ f'(2)=2\times 2=4\ ,\ f'(0)=2\times 0=0$.

2 . تطبيقات الاشتقاق عند العدد

1.2 مماس لمنحنى :

مبرهنة :

f دالة قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس.



المماس للمنحنى (γ) عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ هو مستقيم الذي يمر بالنقطة A ومعامل توجيهه $f'(x_0)$.

لتكن M نقطة من (γ) فاصلتها x_0+h حيث: $h\neq 0$

إذن نسبة التغير: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ هي معامل توجيه المستقيم (AM) وبما أن:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$

فإن المستقيم (Δ) المار بالنقطة A ومعامل توجيهه $f'(x_0)$ يعتبر الوضع النهائي للمستقيم (AM) لما M تقترب من A.

بما أن $f'(x_0)$ معامل توجيهه (Δ) فإن (Δ) له معادلة من الشكل: $y=f'(x_0)x+p$

وبما أن $A(x_0, f(x_0))$ تنتمي إلى (Δ)

فإن: $y_0=f'(x_0)\times x_0+p$ منه $p=y_0-x_0\times f'(x_0)$ ومنه:

$y=f'(x_0)x+y_0-x_0f'(x_0)$

ولكون: $y_0=f(x_0)$ المعادلة السابقة تكتب على الشكل: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

بالتالي المعادلة: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ هي معادلة المماس للمنحنى (γ) عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$.

مثال

لتكن f دالة معرفة على IR بالعبارة $f(x)=x^2$

اوجد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$

الحل:

الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0=1$ و العدد المشتق عند x_0 هو $f'(x_0)=f'(1)$

حيث: $f'(1)=2\times 1=2$

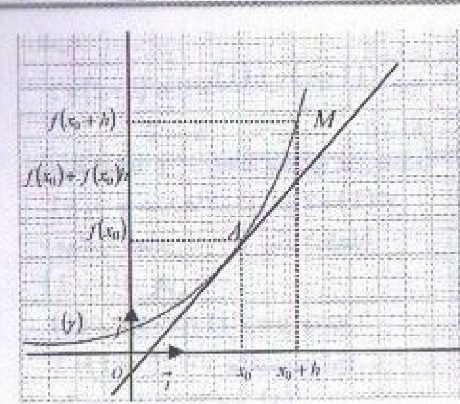
معادلة المماس للمنحني (γ) الممثل للدالة f عند النقطة $A(1, f(1))$ هي:

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ بالتعويض نجد: $y=2(x-1)+1$ ومنه: $y=2x-1$

إذن معادلة المماس لـ (γ) عند: $A(1, 1)$ هي: $y=2x-1$

2.2 التقريب بدالة تآلفية محليا

(γ) المنحنى البياني للدالة f القابلة للاشتقاق عند العدد x_0 و (Δ) المماس لـ (γ) عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$، كون المماس (Δ) قريب من (γ) بجوار النقطة A نستبدل (γ) بـ (Δ) اي



نستبدل محليا الدالة f بالدالة التآلفية الممثلة بالمستقيم (Δ) وهذا يعني أننا نستبدل العدد الحقيقي $f(x_0+h)$ بالعدد الحقيقي: $f(x_0)+f'(x_0)h$ من اجل كل h قريب من الصفر.

كل مستقيم يمر من النقطة A يعطينا تقريب تآلفي لـ: $f(x_0+h)$ لكن نقبل ان المستقيم (Δ) هو افضل تقريب تآلفي لـ: $f(x_0+h)$

نقول أن: $f(x_0)+f'(x_0)h$ هو تقريب تآلفي محلي للعدد $f(x_0+h)$

ملاحظة

المسافة PM هي القيمة المطلقة للخطأ المرتكب لتقريب $f(x_0+h)$

تمرين تدريبي

لتكن f دالة معرفة على IR ب: $f(x)=x^2+1$ وليكن (γ) المنحى الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) بين ان الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0=1$ ثم أوجد معادلة المماس (Δ) للمنحى (γ) عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$

2) ارسم (γ) والمستقيم (Δ)

3) أوجد التقريب التآلفي للدالة f بجوار الواحد ثم أوجد الخطأ المرتكب في هذا التقريب.

الحل:

1) نسبة تغير الدالة f بين 1 و $1+h$ هي: $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ و كون: $f(x)=x^2+1$ نجد: من اجل كل h غير معدوم.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\left[(1+h)^2+1\right]-\left[1^2+1\right]}{h}$$

$$=\frac{(h^2+2h+1+1)-(1^2+1)}{h}$$

$$=\frac{h^2+2h}{h}=h+2$$

إذن :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}(h+2)=2$$

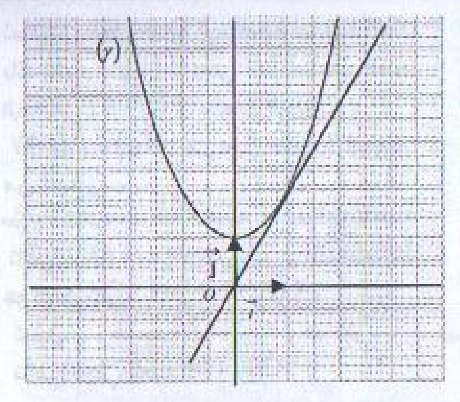
ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0=1$ و عددها المشتق هو $f'(1)=2$

- معادلة المماس لـ : (γ) عند النقطة $A(1\,,\,2)$ هي :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه :

$y=2(x-1)+2$ بالتبسيط نجد :

$y=2x$ إذن: $(\Delta): y=2x$



3) لتقريب التالفي للدالة f بجوار العدد 1 هو : $f(1)+f'(1)\times h$ حيث : $h\rangle 0$ و h صغير جدا

$$f(1)+f'(1)\times h=2+2h$$

إذن : $2+2h$ هو تقريب للعدد $f(1+h)$ اي : $2+2h$ هو تقريب للعدد $(h+1)^2+1$

- حساب الخطأ المرتكب :

$$E=f(1+h)-[f(1)+f'(1)\times h]$$
$$=(1+h)^2+1-(2+2h)$$
$$=1+h^2+2h+1-2-2h=h^2$$

إذن الخطأ المرتكب في التقريب هو h^2

3 - الدوال المشتقة للدوال المرجعية

1.3 الدالة المشتقة

تعريف :

f دالة و D_f مجموعة تعريفها (D مجال او اتحاد مجالات من D_f)

نقول ان f قابلة للاشتقاق على المجال D إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل عدد من D ، عندئذ الدالة التي ترفق بكل x من D العدد المشتق $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f على D ونرمز لها بـ : f' ونكتب : $f':x\mapsto f'(x)$

مثال

لتكن f دالة معرفة على IR بـ: $f(x)=x^2$ الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد x_0 من IR والعدد المشتق لـ f عند x_0 هو : $f'(x_0)=2x_0$ ومنه الدالة المشتقة للدالة f معرفة على IR بـ : $f':x\mapsto 2x$

2.3 الدوال المشتقة لبعض الدوال المرجعية

مبرهنة 1

كل دالة تالفية : $f:x\mapsto ax+b$ قابلة للاشتقاق على IR ودالتها المشتقة هي : $f':x\mapsto a$

الإثبات

من اجل كل : $h\neq 0$ لدينا :

$$t(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f}$$
$$=\frac{[a(x_0+h)+b]-[a\,x_0+b]}{h}$$
$$=\frac{ax_0+ah+b-ax_0-b}{h}=a$$

إذن : $\lim_{h\mapsto 0} t(h)=a$ ومنه : $f'(x_0)=a$

إذن الدالة المشتقة للدالة التالفية : $f:x\mapsto ax+b$ هي الدالة : $f':x\mapsto a$ و نكتب : $f'(x)=a$

مثال

1) الدالة المشتقة للدالة : $f:x\mapsto x$ هي الدالة f' المعرفة على IR بـ: $f'(x)=1$

2) الدالة المشتقة للدالة $f:x\mapsto b$ هي دالة f' المعرفة على IR بـ : $f'(x)=0$

مبرهنة 2

الدالة $f:x\mapsto\sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح : $]0\,,\,+\infty[$ ودالتها المشتقة هي الدالة f' المعرفة على $]0\,,\,+\infty[$ بـ : $f':x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

الإثبات :

من اجل كل x_0 اكبر تماما من الصفر نسبة تغير الدالة : $x\mapsto\sqrt{x}$ بين x_0 و x_0+h هي :

$$t(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x_0}\right)}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}$$
$$=\frac{(x_0+h)-x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$$

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

ومنه الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة f' المعرفة على: $]0\ ,\ +\infty[$ ب: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

□ **مبرهنة 3**

تقبل هذه المبرهنة بدون برهان:

1) الدالة $\sin$ قابلة للاشتقاق من اجل كل عدد حقيقي x ولدينا: $\sin' x=\cos x$

2) الدالة $\cos$ قابلة للاشتقاق من اجل كل عدد حقيقي x ولدينا: $\cos' x=-\sin x$

4 - المشتق من اليمين ومن اليسار عند عدد

المشتق من اليمين عند x_0

f دالة معرفة على D_f حيث: D_f تشمل مجال من الشكل $[x_0\ ,\alpha[$ ، $\alpha \rangle x_0$

نقول ان f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 من اليمين إذا وفقط إذا كانت:

$$\lim_{h \xrightarrow{>} 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_1$$

المشتق من اليسار عند x_0

f دالة معرفة على D_f حيث: D_f تشمل مجال من الشكل: $]\beta\ ,\ x_0]$ و $\beta \langle x_0$

نقول ان f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 من اليسار إذا وفقط إذا كانت:

$$\lim_{h \xrightarrow{<} 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_2$$

نتيجة

إذا كانت f قابلة للاشتقاق من اليمين عند x_0 ومن اليسار عند x_0 و $l_1=l_2$ فإن f قابلة للاشتقاق عند x_0.

تمرين تدريبي 1

لتكن f دالة معرفة على IR ب: $f(x)=|x-1|$

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f من اليمين عند $x_0=1$

2) ادرس قابلية اشتقاق f من اليسار عند: $x_0=1$

3) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0=1$ ثم ارسم (γ) بيانها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ثم استنتج بطريقة أخرى ان الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

✓ الحل:

1) الدالة f معرفة على IR و بالتالي مجموعة تعريف f تشمل مجال من الشكل $[1,+\infty[$

نسبة تزايد الدالة f بين 1 و $1+h$ حيث، $h\rangle 0$ هي: $t(h)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$t(h)=\frac{|1+h-1|-|1-1|}{h}=\frac{|h|}{h}=\frac{h}{h}=1$ ومنه: $\lim_{h \xrightarrow{>} 0} t(h)=1=l_1$

إذن f قابلة للاشتقاق من اليمين عند $x_0=1$

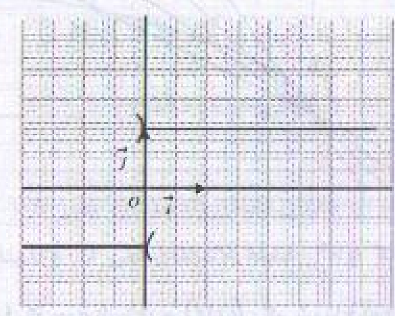
2) مجموعة تعريف الدالة f تشمل مجال من الشكل $]-\infty,1]$

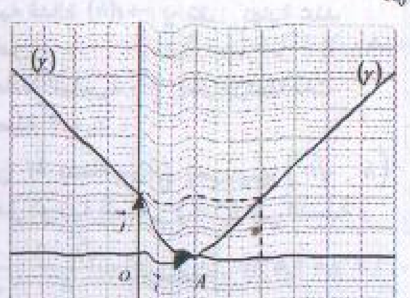
نسبة تزايد f بين 1 و $1+h$ مع $h\langle 0$ هي $t(h)$ حيث:

$$t(h)=\frac{|1+h-1|-|1+1|}{h}=\frac{|+h|}{h}=\frac{|h|}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

$$\lim_{h \xrightarrow{<} 0} t(h)=\lim_{h \xrightarrow{<} 0}(-1)=-1=l_2$$

إذن f قابلة للاشتقاق من اليسار عند $x_0=1$





3) بما ان $l_1\neq l_2$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0=1$

- تمثيل بيان الدالة $t(h)$:

لدينا: $t(h)=\frac{|h|}{h}$ ومنه نستنتج لدينا:

$t(h)=1$ ، $h\rangle 0$

$t(h)=-1$ ، $h<0$.

الدالة $h\mapsto t(h)$ ليست لها نهاية عند الصفر لأنه مثلا لما : h تمسح المجال $]-0{,}001 , 0001[$ ما عدا الصفر الأعداد $t(h)$ لا تقترب من عدد واحد l لذلك الدالة f المعطاة غير قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0=1$

تمرين تدريبي ❷

لتكن f دالة معرفة على : $[0,+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

أوجد معادلة المماس لـ : (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$

✓ الحل :

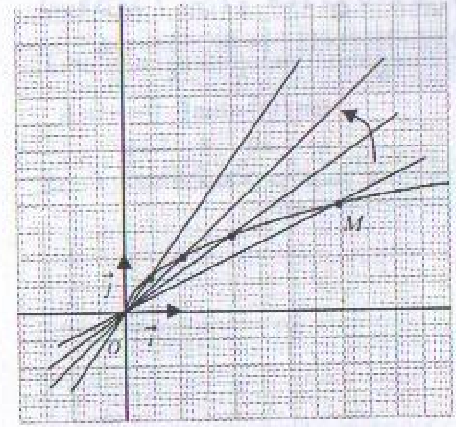
نعلم أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$ لان : $t(h)$ ليست لها نهاية عند الصفر

- نسبة تغير الدالة f بين 0 و $o+h$ هي : $t(h)$ حيث : $t(h)=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$

عندما يقترب h شيئا فشيئا من الصفر

فإن $\sqrt{h}$ يقترب شيئا فشيئا من الصفر

والعدد : $\frac{1}{\sqrt{h}}$ يكبر شيئا فشيئا .



إذن العدد $t(h)$ لا يقترب من عدد حقيقي ثابت وعليه الدالة $t\mapsto t(h)$ لا تقبل نهاية عند الصفر

- معادلة المماس لـ : (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.

لتكن M نقطة من (γ) إحداثيتها $(h , \sqrt{h})$ معامل توجيه المستقيم (OM) هي النسبة :

$t(h)=\frac{\sqrt{h}-0}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$ حيث : $h>0$

كلما اقتربت النقطة M من النقطة O فإن معامل توجيه المستقيم (OM) يكبر شيئا فشيئا وبالتالي الوضعية النهائية للمستقيم (OM) هي المستقيم $(y'y)$ الذي معادلته $x=0$ ومنه معادلة المماس للمنحنى (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ هي $x=0$

❺ - عمليات على الدوال المشتقة

1.5 مشتق مجموع دالتين

□ **مبرهنة**

f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على D

الدالة $f+g$ قابلة للاشتقاق على D ولدينا : $(f+g)'=f'+g'$

□ **الإثبات**

نسبة تغير الدالة $f+g$ بين x_0 و x_0+h هي : $t(h)=\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}$

حيث : $x_0\in D$ و $x_0+h\in D$

$$t(h)=\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0)}{h}$$

$$=\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$=t_1(h)+t_2(h)$$

بما ان : f قابلة للاشتقاق على D فإن : $\lim_{h\mapsto 0} t_1(h)=f'(x_0)$

وبما أن : g قابلة للاشتقاق على D فإن : $\lim_{h\mapsto 0} t_2(h)=g'(x_0)$

ومنه : $\lim_{h\mapsto 0} t(h)=f'(x_0)+g'(x_0)$

إذن : $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$ ومنه : $(f+g)'=f'+g'$.

2.5 مشتق جداء دالتين

□ **مبرهنة**

f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على D

الدالة $f\times g$ قابلة للاشتقاق على D و لدينا : $(f\times g)'=f'\times g+g'\times f$

□ **الإثبات**

نسبة تغير الدالة $f\times g$ بين x_0 و x_0+h هي :

$t(h)=\frac{(f\times g)(x_0+h)-(f\times g)(x_0)}{h}$ حيث : $x_0\in D$ و $x_0+h\in D$

$$t(h)=\frac{f(x_0+h)\times g(x_0+h)-f(x_0)\times g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{g(x_0+h)[f(x_0+h)-f(x_0)]+f(x_0)[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h}$$

$$= g(x_0+h)\times\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+f(x_0)\times\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$= g(x_0+h)\times t_1(h)+f(x_0)\times t_2(h)$$

بما ان الدالة f قابلة للاشتقاق على D فإن، $\lim_{h\to 0} t_1(h)=f'(x_0)$

بما ان الدالة g قابلة للاشتقاق على D فإن $\lim_{h\to 0} t_2(h)=g'(x_0)$

ولدينا، $\lim_{h\to 0} g(x_0+h)=g(x_0)$

منه ينتج، $\lim_{h\to 0} t(h)=g(x_0)\times f'(x_0)+f(x_0)\times g'(x_0)$

وعليه يكون $(f\times g)'(x_0)=f'(x_0)\times g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$

إذن، $(f\times g)'=f'\times g+g'\times f$

نتيجة

إذا كان من اجل كل x من IR ، $g(x)=\lambda$ حيث: λ عدد حقيقي فإن

$(\lambda)'=0$ ، لأن $(\lambda f)'=f'\times\lambda+(\lambda)'\times f=\lambda f'$

ملاحظة

المساواة: $\lim_{x\to x_0} g(x_0+h)=g(x_0)$ ليست دوما صحيحة نأخذ على سبيل المثال الدالة g

المعرفة بالشكل التالي: $g(x)=1$ ، $x\geq 1$ و $g(x)=-1$ ، $x<1$

إذا كان: $h>0$ فإن $g(1+h)=1$ وإذا كان $h<0$ فإن $g(1+h)=-1$

ومنه: $g(1+h)$ ليست لها نهاية

مثال

f و g دالتين معرفتين على IR كما يلي: $f(x)=2x+1$ و $g(x)=x^2$

- عين $(f\times g)'(x)$ و $(3f(x))'$.

الحل:

1) $g'(x)=2x$ ، $f'(x)=2$

$(f\times g)'(x)=f'(x)\times g(x)+g'(x)\times f(x)$

والصواب هو: $[x^2(2x+1)]'=6x^2+2x$

$=2\times x^2+2x(2x+1)$

$=2x^2+4x^2+2x = 6x^2+2x$

خطأ

إذن، من اجل كل $x\in IR$ ، $[x^2(2x+1)]'=4x^2+6x$

2) $[3f(x)]'=3f'(x)=3\times 2=6$ إذن: من اجل كل $x\in IR$ لدينا: $[3(2x+1)]'=6$

3.5 مشتق دالة كثير حدود

مبرهنة

1) من اجل كل عدد طبيعي n حيث: $n\geq 1$ ، الدالة: $x\mapsto x^n$ قابلة للاشتقاق على IR ودالتها المشتقة هي: $x\mapsto n x^{n-1}$ يمكنك برهان هذه المبرهنة بالاعتماد على مشتق جداء دالتين).

2) كل دالة كثير حدود p حيث: $p: x\mapsto a_n x^{n-1}+........+a_1 x+a_0$

قابلة للاشتقاق على IR ودالتها المشتقة هي: p' حيث: $p': x\mapsto na_n x^{n-1}+....a_2 x+a_1$

(يمكنك برهان هذه المبرهنة بالاعتماد على مشتق جداء دالتين)

مثال

- عين الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية:

$f(x)=2x^3+x^2-1$ ، $g(x)=-3x^4+5x^2+5$

$l(x)=x^2+3x-3$ ، $k(x)=x^3-1$

الحل:

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x من IR ، $f'(x)=6x^2+2x$

2) الدالة g قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x من IR ، $g'(x)=-12x^3+10x$

3) الدالة l قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x من IR ، $l'(x)=2x+3$

4) الدالة k قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x من IR ، $k'(x)=3x^2$

4.5 مشتق مقلوب دالة

مبرهنة

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على D و f غير معدومة على D فإن الدالة $\frac{1}{f}$ قابلة للاشتقاق على D ولدينا، $\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}$

الإثبات

x_0 عدد حقيقي من D ، بما ان f قابلة للاشتقاق على D فإنها قابلة للاشتقاق عند x_0

إذن : $\lim_{h\mapsto 0} f(x_0+h)=f(x_0)$

نسبة تغير الدالة $\frac{1}{f}$ بين x_0 و x_0+h هي : $t(h)$ حيث :

$$t(h)=\frac{1}{h}\left[\frac{1}{f(x_0+h)}-\frac{1}{f(x_0)}\right]$$

$$=\frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{f(x_0+h)f(x_0)}\right]$$

$$=\frac{-1}{f(x_0+h)\times f(x_0)}\times\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

بما ان : $\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$ و $\lim_{h\mapsto 0} f(x_0+h)=f(x_0)$

فإن : $\lim_{h\mapsto 0} t(h)=\frac{-1}{(f(x_0))^2}\times f'(x_0)=\frac{-f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$

إذن : $\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}$

نتيجة

من اجل كل عدد طبيعي n حيث : $n\geq 1$ الدالة : $x\mapsto\frac{1}{x^n}$ قابلة للاشتقاق على IR^* ودالتها المشتقة $x\mapsto\frac{-n}{x^{n+1}}$ (استعمل مشتق المقلوب حيث ناخذ : $f(x)=x^n$)

ملاحظة

الدالة f حيث : $f(x)=\frac{1}{x^n}$ ، و n عدد طبيعي تكتب على الشكل : $f(x)=x^{-n}$

والدالة f' حيث : $f'(x)=\frac{-n}{x^{n+1}}$ تكتب على الشكل : $f'(x)=(-n)x^{-n-1}$

بوضع : $-n=n'$ نجد : $f(x)=x^{n'}$ و $f'(x)=n'x^{n'-1}$

إذن الدالة المشتقة للدالة : $x\mapsto x^n$ ، حيث : $n\in z$ هي الدالة : $x\mapsto nx^{n-1}$

مثال

لتكن f دالة معرفة على IR بـ: $f(x)=x^2+3x$

أوجد الدالة المشتقة للدالة $\frac{1}{f}$

✓ **الحل :**

الدالة $\frac{1}{f}$ معرفة على $IR-\{0,-3\}$ ولدينا من اجل كل x من $IR-\{0,-3\}$:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}=\frac{-(2x+3)}{(x^2+3x)^2}$$

5.5 مشتق قسمة دالتين

❑ **مبرهنة**

f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على D ، من اجل كل عدد حقيقي x_0 من D بحيث $g(x_0)\neq 0$ فإن : الدالة $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق على D ولدينا : $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-g'\times f}{g^2}$

❑ **الإثبات**

بكتابة $\frac{f}{g}$ على الشكل : $f\times\frac{1}{g}$ وبتطبيق مشتق جداء دالتين ومقلوب دالة نتحصل على النتيجة السابقة .

مثال

v دالة عددية معرفة كما يلي : $v(x)=\frac{2x+1}{3x-4}$

- احسب $v'(x)$

✓ **الحل :**

الدالة v معرفة على $IR-\left\{\frac{4}{3}\right\}$ ومن اجل كل x من $IR-\left\{\frac{4}{3}\right\}$ لدينا :

$$V'(x)=\frac{(2x+1)'\times(3x-4)-(3x-4)'\times(2x+1)}{(3x-4)^2}$$

$$=\frac{2(3x-4)-3(2x+1)}{(3x-4)^2}$$

$$=\frac{6x-8-6x-3}{(3x-4)^2}=\frac{-11}{(3x-4)^2}$$

6.5 مشتق الدالة $x\mapsto f(ax+b)$

❑ **مبرهنة**

f قابلة للاشتقاق على D ، a و b عددين حقيقيين، I مجموعة الأعداد الحقيقية x

بحيث : $ax+b \in D$

الدالة : $g: x \mapsto f(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا من اجل كل x من I :

$$g'(x)=af'(ax+b)$$

لاحظ ان الدالة g هي مركب من الدالة $x \xrightarrow{V} ax+b$ متبوعة بالدالة f اي : $g=foV$

□ الإثبات

نسبة تغير الدالة g بين x_0 و x_0+h حيث : $x_0 \in I$ و $x_0+h\in I$ هي : $t(h)$

$$t(h)=\frac{(foV)(x_0+h)-(foV)(x_0)}{h}=\frac{f(V(x_0+h))-f(V(x_0))}{h}$$

$$=\frac{f(V(x_0+h))-f(V(x_0))}{V(x_0+h)-V(x_0)}\times\frac{V(x_0+h)-V(x_0)}{h}$$

بما ان $\lim\limits_{h\mapsto 0}\frac{V(x_0+h)-V(x_0)}{h}=a$ و $V(x_0+h)-V(x_0)=ah$ فإن :

$V(x_0+h)=ah+V(x_0)$ ، بوضع : $ah=h'$ و $V(x_0)=x'_0$ نجد :

$$\frac{f(V(x_0+h))-f(V(x_0))}{V(x_0+h)-V(x_0)}=\frac{f(h'+x'_0)-f(x'_0)}{h'}$$

لما h يؤول إلى الصفر فإن : h' يؤول إلى الصفر ومنه :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(V(x_0+h))-f(V(x_0))}{V(x_0+h)-V(x_0)}=\lim_{h'\mapsto 0}\frac{f(x_0+h')-f(x'_0)}{h'}$$

$$=f'(x'_0)=f'(V(x_0))$$

إذن ، $\lim\limits_{h\mapsto 0} t(h)=V'(x_0)\times f'(V(x_0))=af'(ax_0+b)$

◆ مثال

1) لتكن الدالة g المعرفة على IR بـ : $g(x)=(2x+1)^2$

احسب $g'(x)$

2) احسب مشتق الدالة k المعرفة على IR بـ : $k(x)=\sin(2x+3)$

✓ الحل :

1) بوضع : $V(x)=2x+1$ و $f(x)=x^2$ نجد ، $g(x)=fov(x)=(2x+1)^2$

ومن اجل كل x من I حيث : $I=IR$ لدينا :

$$g'(x)=v'(x)\ f'(v(x))=2(2v(x))=4(2x+1)=8x+4$$

2) بوضع : $v(x)=2x+3$ و $f(x)=\sin(x)$ نجد ، $k(x)=fov(x)$

$$k(x)=(vof)(x)=\sin(2x+3)$$

الدالتين V و f قابلتين للاشتقاق على IR ولدينا ، من اجل كل x من IR : $V'(x)=2$

و $f'(x)=\cos x$

إذن : $k'(x)=V'(x)\times f'(V(x))=2\times\cos V(x)=2\times\cos(2x+3)$

تمرين تدريبي

- بين ان الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=\sqrt{2x-1}$ قابلة للاشتقاق عند العدد 2 ثم احسب : $g'(2)$

✓ الحل :

بوضع : $V(x)=2x-1$ و $f(x)=\sqrt{x}$ نجد : $g(x)=foV(x)$

$$g(x)=(foV)(x)=f(2x-1)$$

مجموعة تعريف الدالة g هي : $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

الدالة V قابلة للاشتقاق على IR وبالتالي، من اجل كل x من IR لدينا : $V'(x)=2$

والدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ، ولدينا من اجل كل x من $]0,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال I حيث : $I=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

ومن اجل كل x من I لدينا :

$$g'(x)=V'(x)\times f'(V(x))$$

$$=2\times\frac{1}{2\sqrt{V(x)}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

إذن من اجل $x=2$ نجد : $g'(2)=\frac{1}{\sqrt{2\times2-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

6 ملخص لمشتق بعض الدوال الشهيرة

الدوال	المشتق	تعاليق
$x\mapsto ax+b$	$x\mapsto a$	
$x\mapsto x^n$	$x\mapsto nx^{n-1}$	$n\geq1\ ,\ n\in IN$
$x\mapsto\frac{1}{x^n}$	$x\mapsto\frac{-n}{x^{n+1}}$	

$n\geq 1\ ,n\in IN,x\in IR-\{0\}$		
$x\in\left]0,+\infty\right[$	$x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x\mapsto\sqrt{x}$
$x\in IR$	$x\mapsto\cos x$	$x\mapsto\sin x$
$x\in IR$	$x\mapsto-\sin x$	$x\mapsto\cos x$
انظر إلى شروط تطبيق هذه النظريات	$f'+g'$	$f+g$
	$f'\,g+f\,g'$	$f\,g$
	$\lambda f'$	λf (λ عدد ثابت)
	$\frac{-f'}{f^2}$	$\frac{1}{f}$
	$\frac{f'\,g-g'\,f}{g^2}$	$\frac{f}{g}$
	$x\mapsto a\,u'(ax+b)$	$x\mapsto u\,(ax+b)$

7. الإنشاء الهندسي للمماس

1.7 إنشاء المماس للقطع المكافئ ذو المعادلة: $y=x^2$

مثال

ليكن (γ) قطع مكافئ ذو المعادلة $y=x^2$ في المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$،

ولتكن M نقطة من (γ) فاصلتها x_0 حيث: $x_0\neq 0$

1) انشئ H المسقط العمودي للنقطة M على محور التراتيب

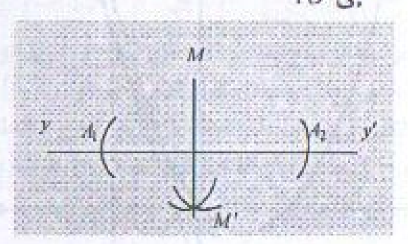
2) انشئ I نظيرة H بالنسبة إلى النقطة O ثم استنتج ان المستقيم (IM) هو المماس للمنحني (γ) في النقطة M.

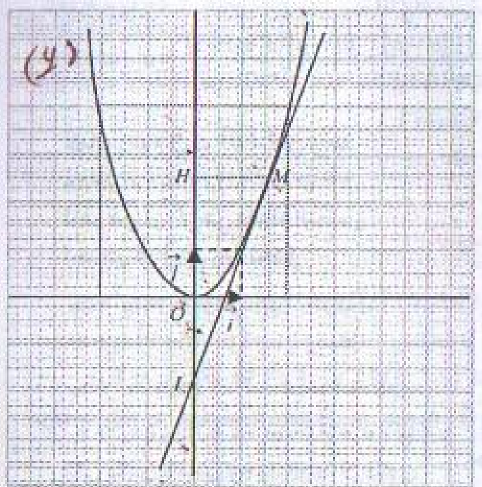
✓ الحل:

1) نفتح الفرجار بفتحة مناسبة ثم نضع الإبرة في النقطة M ثم نرسم قوسين دائرة يقطعان $(y\,y')$ في النقطتين A_2 ، A_1 ثم بنفس الفتحة نرسم قوس أول مركزه النقطة A_1 وقوس ثانية مركزها النقطة A_2 يتقاطعان في النقطة M'.
للمستقيم (MM') عمودي على المستقيم $(A_1\,A_2)$ في النقطة H التي هي مسقط العمودي

للنقطة M على $(y\,y')$.

2) نرسم دائرة مركزها النقطة O ونصف قطرها $[OH]$ تقطع المستقيم $(y\,y')$ في النقطتين H و I وبما أن: $[I\,H]$ قطر لهذه الدائرة فإن: $OH=OI$
و بالتالي: I هي نظيرة H بالنسبة إلى O.





الاستنتاج:

بما أن: M تنتمي إلى (γ) فإن: $y_M={x_0}^2$ و $y_I=-{x_0}^2$

ميل المستقيم (IM) هو $\frac{y_M-y_I}{x_M-x_I}$

$$\frac{y_M-y_I}{x_M-x_I}=\frac{x^2{}_0-\left(-{x_0}^2\right)}{x_0-0}=\frac{2{x_0}^2}{x_0}=2x_0$$

نعلم ان العدد المشتق لدالة: $x\xrightarrow{f}x^2$ عند العدد x_0 هو: $f'(x_0)=2x_0$

إذن ميل المستقيم (IM) هو: $f'(x_0)$ وبالتالي (IM) هو مماس المنحنى (γ) عند النقطة M

2.7 إنشاء المماس لقطع المكافئ معادلته $y=x^2+x$

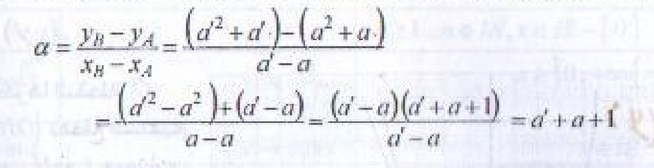
مثال

ليكن (γ) القاطع المكافئ ذو المعادلة: $y=x^2+x$ ولتكن A و B نقطتين من (γ) فاصلتهما على التوالي a و a' حيث: $a\neq a'$.

1) برهن انه يوجد مماس وحيد للمنحني (γ) يوازي المستقيم $(A\,B)$ وأن فاصلة نقطة التماس هي المتوسط الحسابي لفاصلة A و B
استنتج إنشاء هندسيا لمماس المنحني (γ).

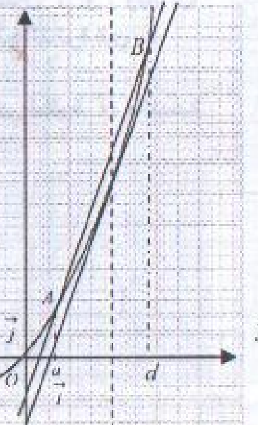
✓ الحل:

1) ميل للمستقيم $(A\,B)$ هو α حيث:



$$\alpha=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\left(a'^2+a'\right)-\left(a^2+a\right)}{a'-a}$$

$$=\frac{\left(a'^2-a^2\right)+\left(a'-a\right)}{a'-a}=\frac{\left(a'-a\right)\left(a'+a+1\right)}{a'-a}=a'+a+1$$



الماس الموازي لـ: (AB) ان وجد معادلته : $y=(a+a'+1)x+m$

لنفرض ان I هي نقطة التماس احداثياها $(x_0\,,y_0)$ تحقق

$y_0=x_0^2+x_0$ ومن جهة أخرى :

$y_0=(a+a'+1)x_0+m$ ومنه :

$m=-(a+a'+1)x_0+x_0^2+x_0$ إذن :

$y=(a+a'+1)x-(a+a'+1)x_0+x_0^2+x_0$

لكي يكون الماس وحيد يجب ان يكون التقاطع الماس مع المنحنى (γ) نقطة وحيدة أي جملة المعادلتين ذات المجهولين $x\,,\,y$ التالية : $y=x^2+x$ و $y=(a+a'+1)x-(a+a'+1)x_0+x_0^2+x_0$ لها حل وحيد .

منه ينتج : $x^2+x=(a+a'+1)x-(a+a'+1)x_0+x_0^2+x_0$

بالتبسيط نجد : $x^2-(a+a')x+x_0^2=0$

$$\Delta=(a+a')^2-4x_0^2$$

حتى يكون للجملة السابقة حل وحيد يجب ان يكون للمعادلة : $x^2-(a+a')x+x_0^2=0$ حل وحيد أي : يكون المميز Δ معدوم

$(a+a')^2-4x_0^2=0$ يكافئ : $(a+a')^2=(2x_0)^2$

يكافئ : $a+a'=2x_0$ أو $a+a'=-2x_0$

وبالتالي نجد : $x_0=\frac{a+a'}{2}$ أو : $x_0=-\frac{a+a'}{2}$

بما ان فاصلة A هي a وفاصلة B هي a' فإن فاصلة النقطة I تنتمي الى المجال : $[a\,,a']$ أو $[a'\,,a]$ وعليه فإن : $x_0=-\frac{a+a'}{2}$ مرفوض و $x_0=\frac{a+a'}{2}$ مقبول

إذن فاصلة نقطة الماس هي الوسط الحسابي لفاصلتي A و B

وبالتالي يوجد مماس وحيد للمنحنى (γ) يوازي المستقيم (AB) .

2) لإنشاء مماس المنحنى (γ) عند النقطة $I(x_0\,,y_0)$ نتبع الخطوات التالية :

أ) نعين النقطتين A و B من المنحنى فاصلتهما على التوالي : a, a' حيث : $\frac{a+a'}{2}=x_0$

ثم نرسم المستقيم (AB) .

ب) نرسم المستقيم ذوا المعادلة $x=x_0$ الذي يقطع المنحى (γ) في النقطة I ثم نرسم بعد ذلك المستقيم (Δ) المار من I وا الموازي للمستقيم (AB) .

المستقيم (Δ) هو الماس للمنحني (γ) في النقطة I .

8 . الوضع النسبي لمنحى و مماساته

دراسة الوضع النسبي للمنحى (γ_1) و (γ_2) ذوا المعادلة : $y=f(x)$ و $y=g(x)$ يعني تعين اكبر مجال بحيث يكون فيه (γ_1) فوق (γ_2) أو العكس.

تكون $M(x_1\,,y_1)$ نقطة من (γ_1) فوق النقطة $M(x_2\,,y_2)$ من (γ_2) إذا كانت $y_1\geq y_2$

إذن لإيجاد المجال الذي يكون فيه (γ_1) فوق (γ_2) نبحث عن الأعداد الحقيقية x التي تحقق : $f(x)\geq g(x)$

مثال

(γ) المنحى البياني للدالة f المعرفة بالشكل $f(x)=x^3$ ، A نقطة من (γ) فاصلتها α .

1) أوجد معادلة الماس (T_α) للمنحى (γ) في النقطة A .

2) استنتج ان دراسة الوضعية النسبية لـ : (γ) بالنسبة إلى (T_α) يؤول إلى حل المتراجحة ذات المجهول x التالية :

$$x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3\geq 0 ....(I)$$

3) أ) بين انه من اجل كل x من IR لدينا

$$x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3=(x-\alpha)\left(x^2+\alpha x-2\alpha^2\right)$$

ب) استنتج حسب قيم α حلول المتراجحة (I)

ج) أوجد عند ئذا حسب قيم α الوضع النسبي لـ: (γ) بالنسبة إلى (T_α)

د) نسمي نقطة انعطاف للمنحى (γ) النقطة B بحيث الماس عندها يخترق (γ)

- أوجد هذه النقطة .

✓ الحل :

1) $M(\alpha\,,\alpha^3)$ نقطة من (γ)

ميل الماس (T_α) عند النقطة A هو : $f'(\alpha)$

لدينا من اجل كل x من IR : $f'(x)=3x^2$

ومنه معادلة (T_α) تكون من الشكل : $(T_\alpha): y=3\alpha^2(x-\alpha)+\alpha^3$

إذن $(T_\alpha): y=3\alpha^2x-2\alpha^3$

2) إن دراسة الوضع النسبي لـ : (γ) و (T_α) يؤول إلى تعيين اكبر مجال من D_f بحيث يكون (γ) فوق ، (T_α) أو العكس .

إذا كانت $M_1\left(x, f(x)\right)$ نقطة من (γ) و $M_2\left(x, y\right)$ نقطة من (T_α) و (γ) فوق (T_α) فإن : $f(x) \geq y$ اي ، $x^3 \geq 3\alpha^2 x - 2\alpha^3$ بالتبسيط نجد : $x^3 - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3 \geq 0$

3) ا) $(x-\alpha)\left(x^2+\alpha x-2\alpha^2\right) = x^3+\alpha x^2-2\alpha^2 x-\alpha x^2-\alpha^2 x+2\alpha^3$
$= x^3-3\alpha^2 x+2\alpha^3$

ب) لحل المتراجحة (I) نعين إشارة العبارتين $\left(x^2+\alpha x-2\alpha^2\right)$ ، $(x-\alpha)$ ثم ندونها في جدول ثم بعد ذلك نعين حلول المترجحة (I)

مميز المعادلة : $x^2+\alpha x-2\alpha^2=0$ هو $\Delta=9\alpha^2$

ومنه المعادلة $x^2+\alpha x-2\alpha^2=0$ لها حلين هما α ، -2α

بالتالي المعادلة : $(x-\alpha)\left(x^2+\alpha x-2\alpha^2\right)=0$ لها حلين هما : α ، -2α ولترتيب هذه الحلول نميز حالتين :

☐ الحالة الأولى : $\alpha > 0$

x	$-\infty$		-2α		α		$+\infty$
$x-\alpha$		-		-	0	+	
$x^2+\alpha x-2\alpha^2$		+	0	-	0	+	
$(x-\alpha)\left(x^2+\alpha x-2\alpha^2\right)$		-	0	+	0	+	

$x^3-3\alpha^2 x+2\alpha^3 \geq 0$ إذا وفقط إذا كانت x تنتمي إلى : $[-2\alpha, \alpha]\cup[\alpha, +\infty[$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة (I) هي : $S_1=[-2\alpha, \alpha]\cup[\alpha, +\infty[$

☐ الحالة الثانية : $\alpha < 0$

x	$-\infty$		α		-2α		$+\infty$
$x-\alpha$		-	0	+		+	
$x^2+\alpha x-2\alpha^2$		+	0	-	0	+	
$(x-\alpha)\left(x^2+\alpha x-2\alpha^2\right)$		-	0	-	0	+	

$x^3-3\alpha^2 x+2\alpha^3 \geq 0$ إذا و فقط إذا كانت x تنتمي إلى : $[-2\alpha, +\infty[$

ج) استنتاج الوضع النسبي لـ : (γ) بالنسبة إلى (T_α)

☐ حالة $\alpha > 0$

- إذا كان : $x\in[-2\alpha, \alpha]\cup[\alpha, +\infty[$ فإن المنحى (γ) يقع فوق المماس (T_α)
- إذا كانت $x\in]-\infty, -2\alpha[$ فإن (γ) يقع تحت (T_α)

المماس (T_α) يقطع (γ) في نقطتين فاصلتهما : $\alpha, -2\alpha$

☐ حالة $\alpha < 0$

- إذا كان : $x\in]-2\alpha, +\infty[$ فإن المنحى (γ) يقع فوق (T_α)
- إذا كان : $x\in]-\infty, \alpha]\cup[\alpha, -2\alpha[$ فإن المنحى (γ) يقع تحت (T_α)

المماس (T_α) يقطع (γ) نقطتين فاصلتهما $\alpha, -2\alpha$

☐ حالة $\alpha = 0$

في هذه الحالة المنحى (γ) يقطع (T_0) في نقطة وحيدة B فاصلتها 0 وترتيبها 0 و النقطة B تسمى نقطة انعطاف .

والمماس (T_0) يقع فوق (γ) إذا كان $x < 0$ و يقع تحت (γ) إذا كان ، $x > 0$ ويقطع (γ) في النقطة $O(0, 0)$.

9 - مماس لدائرة

مثال

$\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي، (C) دائرة مركزها O ونصف قطرها 1 ، P و Q نقطتان إحداثياتهما على التوالي $(-1, 0)$ ، $(1, 0)$

1) ا) تحقق أن معادلة (C) هي : $x^2+y^2=1$

ب) (C_1) هي نصف دائرة التي تقع في نصف المستوي العلوي المحدد بـ : (xx') ما عدا النقطة p .

- بين ان (C_1) هي المنحى البياني للدالة $f: x\mapsto\sqrt{1-x^2}$

2) α عدد حقيقي من المجال $]-1, 1[$

ا) بين ان f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1, 1[$ ثم احسب $f'(x)$.

ب) نسمي (T_α) المماس لـ : (C_1) في النقطة A التي فاصلتها α

- بين ان (T_α) عمودي على (OA) وماذا نستنتج ؟

(تقبل ان مستقيمين متعامدين إذا وفقط إذا كان جداء ميلهما يساوي -1)

3) ليكن $t(h)$ نسبة تغير الدالة f بين 1 و $1+h$ مع $h < 0$

- تحقق ان : $t(h)=\frac{-1}{\sqrt{-h}}\times\sqrt{2+h}$ ثم استنتج ان المنحى (C_1) يقبل مماسا في النقطة Q يوازي (yy')

✓ الحل :

1) ا) لتكن M نقطة من (C) إحداثيتها $(x\ ,\ y)$ منه : $OM = R$ حيث : $R=1$

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ومنه : $OM=\sqrt{x^2+y^2}$

إذن المساواة : $OM = R$ تصبح :

$\sqrt{x^2+y^2}=1$ بتربيع طرفي المساواة نجد :

$x^2+y^2=1$

ب) المساواة : $x^2+y^2=1$ تكتب على الشكل :

$y^2=1-x^2$

بما أن : $y^2 \geq 0$ فإن $1-x^2 \geq 0$ ومنه قيم x التي تحقق : $1-x^2 \geq 0$ هي : $[-1,1]$

بجذر طرفي المساواة $y^2=1-x^2$ نجد : $|y|=\sqrt{1-x^2}$

وبما أن (C_1) تقع في النصف العلوي للمستوي فإن اية نقطة منه ترتيبها موجب أي :

$y \geq 0$ و بالتالي : $|y|=y$ وعليه يكون $y=\sqrt{1-x^2}$

إذن الدالة : $x \xrightarrow{f} \sqrt{1-x^2}$ المعرفة $]-1\ ,\ 1[$ هي الدالة التي منحاها البياني (C_1)

2) من اجل كل $x \in]-1\ ,\ 1[$ نستطيع كتابة $f(x)$ على الشكل التالي:

$$f(x)=\sqrt{(1-x)(1+x)}=\sqrt{1-x}\ \sqrt{1+x}$$

ا) إثبات ان الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$

الدالة : $x \xrightarrow{U} \sqrt{1-x}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,1[$ فهي قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$

الدالة : $x \xrightarrow{V} \sqrt{1+x}$ قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$

إذن الدالة $U \times V$ قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$ اي : الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$

- حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=(U\,V)'(x)=U'(x)V(x)+V'(x)\,U(x)$$

$$=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\times\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\times\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad =\frac{-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{1+x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{2\sqrt{1-x}\ \sqrt{1+x}} \quad =\frac{-(1+x)+(1-x)}{2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x}\ \sqrt{1+x}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ب) معادلة الماس (T_α) للمنحى (γ) عند النقطة A هي :

$$y=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)$$

معادلة المستقيم (OA) هي: $y=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}x$ حيث : $\alpha \neq 0$

نقول عن المستقيمان (OA) و (T_α) انهما متعامدان إذا وفقط إذا كان جداء ميلهما يساوي (-1) .

$$f'(\alpha)\times\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}=\frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\times\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}=-1$$

ومنه المستقيمان (OA) و (T_α) متعامدان

3)

$$t(h)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{1-(1+h)^2}}{h}$$

$$=\frac{\sqrt{-h^2-2h}}{h}=\frac{\sqrt{-h(2+h)}}{h}$$

$$=\frac{\sqrt{-h}\sqrt{2+h}}{h}=\frac{-h}{h\sqrt{-h}}\sqrt{2+h}$$

$$=\frac{-\sqrt{2+h}}{\sqrt{-h}}=\frac{-1}{\sqrt{-h}}\times\sqrt{2+h}$$

نلاحظ ان كلما اقترب h شيئا فشيئا من الصفر فإن $\frac{1}{\sqrt{-h}}$ يكبر شيئا فشيئا وبالتالي $t(h)$ ليست له نهاية حقيقية وعليه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1 والمستقيم (T_1) يصبح يوازي $(y\,y')$ ، وبما ان نصف الدائرة (C_2) هي نظيرة (C_1) بالنسبة إلى $(x\,x')$ فإن (C_2) يقبل مماس عند اية نقطة منه .

إذن يوجد مماس عند أي نقطة من الدائرة (C) .



تطبيقات نموذجية

تطبيق 1: قابلية اشتقاق دالة عند عدد

هل الدوال التالية قابلة للاشتقاق عند العدد a إذا كان كذلك فأوجد قيمة العدد المشتق عندئذ

1) $f(x)=-3x+5$ ، $a=5$

2) $f(x)=3x^2+x-1$ ، $a=2$

3) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ ، $a=1$

✓ الحل:

لكي تقبل الدالة f الاشتقاق عند العدد a يجب أن يكون $a\in D_f$ و

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$$ حيث: $l\in IR$

1) $D_f=IR$ ، $5\in IR$

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{-3(5+h)+5+10}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{-3h}{h}=-3$$

منه الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $a=5$ و $f'(5)=-3$

2) $D_f=IR$ ، $a\in IR$

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{3(2+h)^2+(2+h)-1-13}{h}$$

$$=\lim_{h\mapsto 0}\frac{3h^2+12h+12+2+h-14}{h}$$

$$=\lim_{h\mapsto 0}\frac{3h^2+13h}{h}=\lim_{h\mapsto 0}(3h+13)=13$$

منه الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $a=2$ و $f'(2)=13$

3) $D_f=IR-\left\{\frac{-1}{2}\right\}$ ، $a\in IR$

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{\frac{1}{2h+3}-\frac{1}{3}}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{3-2h-3}{h(3)(2h+3)}$$

$$=\lim_{h\mapsto 0}\frac{-2}{3(2h+3)}=\frac{-2}{9}$$

منه f قابلة للاشتقاق عند العدد a و $f'(1)=\frac{-2}{9}$.

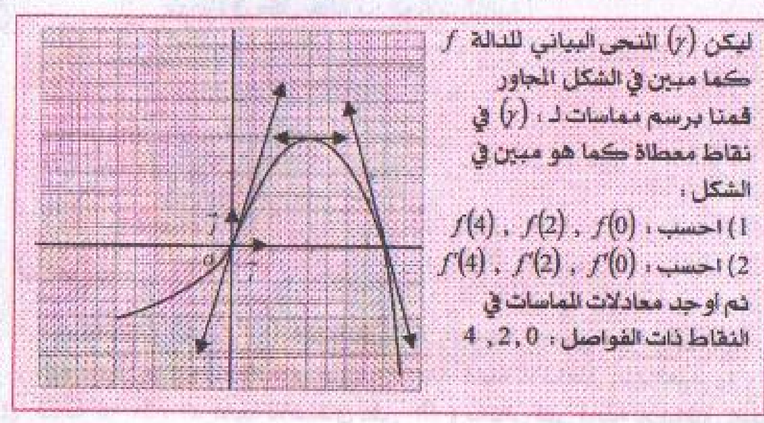
تطبيق 2: تعيين معادلة المماس باستعمال المنحنى

ليكن (γ) المنحنى البياني للدالة f كما مبين في الشكل المجاور قمنا برسم مماسات لـ : (γ) في نقاط معطاة كما هو مبين في الشكل :

1) احسب : $f(4)$ ، $f(2)$ ، $f(0)$

2) احسب : $f'(4)$ ، $f'(2)$ ، $f'(0)$

ثم أوجد معادلات المماسات في النقاط ذات الفواصل : 4 ،2 ،0



✓ الحل:

1) $f(4)=0$ ، $f(2)=3$ ، $f(0)=0$

2) □ حساب : $f'(0)$

$f'(0)$ هو ميل المستقيم الذي يشمل النقطتين O و $A_1\left(\frac{1}{2}\ ,\ 2\right)$ منه :

$f'(0)=\frac{2-0}{\frac{1}{2}-0}=4$ ومعادلة المماس للمنحني (γ) عند النقطة O هي : $y=f'(0)x$

بالتعويض نجد : $y=4x$

□ حساب : $f'(2)$

$f'(2)$ هو ميل المستقيم الذي يشمل النقطتين $A_2(2\ ,3)$ والموازي لـ : (xx')

وبتالي : $f'(2)=0$

ومعادلة المماس للمنحني (γ) عند النقطة $A_2(2\,,3)$ هي: $y=f(2)=3$

□ حساب $f'(4)$

$f'(4)$ هو ميل المستقيم الذي يشمل النقطتين $A_3(4\,,0)$ و $A_1(3{,}5\,,2)$ ومنه:

$$f'(4)=\frac{2-0}{3{,}5-4}=\frac{2}{-0{,}5}=-4$$

ومعادلة المماس للمنحني (γ) عند النقطة (A_3) هي: $y=f(4)+f'(4)(x-4)$

$y=0+(-4)(x-4)$ بالتبسيط نجد: $y=-4x+16$.

تطبيق . 3: تعيين معادلة المماس باستعمال عبارة الدالة

- عين معادلة المماس للمنحنى (γ) الممثل للدالة f في النقطة ذات الفاصلة x_0 المعطاة في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=5x-8$ ، $x_0=4$
2) $f(x)=2x^2-x+1$ ، $x_0=1$
3) $f(x)=\frac{2}{x-4}$ ، $x_0=5$
4) $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ ، $x_0=1$

الحل:

معادلة مماس المنحنى (γ) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هي من الشكل: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ حيث: f دالة قابلة للاشتقاق عند العدد x_0

1) الدالة $x\mapsto 5x-8$ قابلة للاشتقاق على IR و بالتالي فهي قابلة للاشتقاق عند: $x_0=4$

ولدينا: $$f'(4)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{5(4+h)-8-12}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{5h}{h}=5$$

منه معادلة المماس لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 4 هي: $y=12+5(x-4)$

بالتبسيط: $y=5x-8$.

2) الدالة: $x\mapsto 2x^2-x+1$ قابلة للاشتقاق على IR وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق عند العدد 1

ولدينا: $$f'(1)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)^2-(1+h)+1-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}(2h+3)=3$$

منه معادلة المماس للمنحني (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$ هي: $y=2+3(x-1)$

بالتبسيط نجد $y=3x-1$

3) الدالة $x\mapsto\frac{2}{x-4}$ قابلة للاشتقاق على $IR-\{4\}$ وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق عند $x_0=5$

و لدينا: $$f'(5)=\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{(5+h)-4}-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{h+1}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(h+1)}=\lim\frac{-1}{h+1}=-1$$

ومنه معادلة المماس للمنحني (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=5$ هي: $y=2+(-1)(x-5)$

بالتبسيط نجد: $y=-x+7$

4) الدالة $x\mapsto\frac{2x+3}{x-2}$ قابلة للاشتقاق على $IR-\{2\}$ وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$ ولدينا:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(1+h)+3}{1+h-2}+5}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{7h}{h(h-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{7}{(h-1)}=-7$$

منه معادلة المماس للمنحني (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$ هي:

$y=-5+(-7)(x-1)$

بالتبسيط نجد: $y=-7x+2$

تطبيق . 4: تعيين ميل المماس

1) المستقيم ذو المعادلة: $y=2x+3$ هو المماس في النقطة A ذات الفاصلة $x_0=5$ للمنحنى (γ) الممثل للدالة f.
احسب: $f(5)$ ، $f'(5)$

2) المستقيم ذو المعادلة $y=0$ هو المماس في النقطة B ذات الفاصلة $x_0=2$ للمنحنى (γ') الممثل للدالة g.
احسب: $g(2)$ و $g'(2)$.

✓ **الحل :**

1) النقطة A تنتمي إلى المستقيم ذوا المعادلة $y=2x+3$ ومنه : $y_A=2x_A+3$ بالتعويض نجد : $y_A=13$ منه : $A(5,13)$ وبما ان A هي نقطة مماس فإن A تنتمي إلى (γ) وبالتالي $f(5)=13$

$f'(5)$ هو ميل الماس للمنحني (γ) عند النقطة A ، وبما أن ميل الماس هو 2 فإن $f'(5)=2$

2) النقطة B تنتمي إلى المستقيم ذوا المعادلة $y=0$ وبالتالي : $B(2,0)$

بما أن : B هي نقطة الماس فإن B تنتمي إلى (γ') وبالتالي : $g(2)=0$

$g'(2)$ هو ميل الماس لمنحني (γ') عند النقطة B وبما أن ميل الماس هو 0 فإن : $g'(2)=0$.

تطبيق 5 : رسم مماسات لمنحني

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) ا) ارسم المنحى البياني (γ) للدالة f المعرفة ب : $f(x)=-x^2+4$

ب) ارسم مماسات للمنحى (γ) في النقط ذات الفواصل التالية : -2 , $+\frac{1}{2}$, 0

2) أوجد معادلة الماس للمنحى (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=2$ الذي يوازي المستقيم ذوا المعادلة : $y=-4x+5$

✓ **الحل :**

1) ا) بما ان f هي دالة كثير حدود من الدرجة الثانية فإن بيانها هو قطع مكافئ فاصلة ذروته هي $-\frac{b}{2a}$ حيث : $a=-1$, $b=0$, $c=4$ بالتعويض نجد : $-\frac{b}{2a}=0$ وترتيبها هو 4 بما ان : $a\langle 0$ و $\Delta\rangle 0$ فإن المنحى (γ) مشدود نحو الأسفل ويقطع (xx') في النقطتين ذات الفاصلتين $-2,2$.

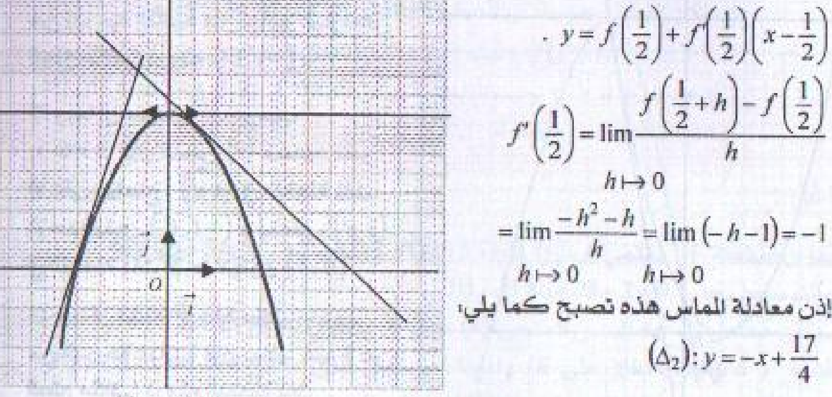
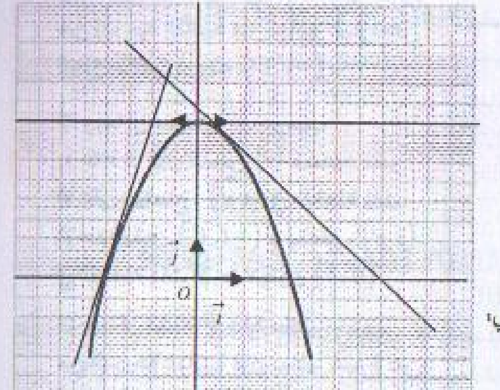
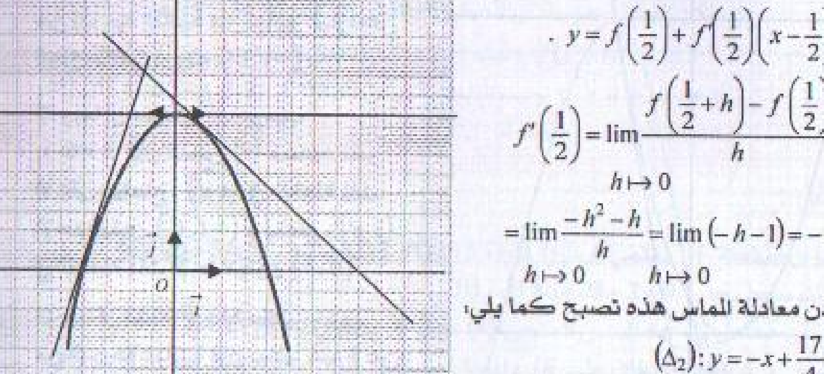
ب) رسم الماسات للمنحني (γ)

- معادلة الماس لـ : (γ) عند النقطة ذات الفاصلة -2 هي : $y=f(-2)+f'(-2)(x+2)$

لكن $f'(-2)=\lim\limits_{h\mapsto 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim\limits_{h\mapsto 0}(4-h)=4$

إذن معادلة الماس هذه تصبح كما يلي : $(\Delta_1): y=4x+8$

□ معادلة الماس لـ : (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{2}$ هي :

$y=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\mapsto 0}\frac{-h^2-h}{h}=\lim_{h\mapsto 0}(-h-1)=-1$$

إذن معادلة الماس هذه تصبح كما يلي: $(\Delta_2): y=-x+\frac{17}{4}$

□ معادلة الماس لـ : (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي : $y=f(0)+f'(0)(x-0)$

$$f'(0)=\lim\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\frac{-h^2}{h}=0$$

إذن معادلة الماس للمنحني (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0 تصبح كما يلي : $(\Delta_3): y=4$

2) معادلة الماس للمنحني (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 2 هي : $y=f(2)+f'(2)(x-2)$

بما ان الماس يوازي المستقيم ذوا المعادلة $y=-4x+5$ فإن لهما نفس الميل اي : $f'(2)=-4$

وبتالي : $y=0+(-4)(x-2)$ بالتبسيط نجد : $y=-4x+8$.

تطبيق 6 : الماسين لمنحنيين عند نقطة تقاطعهما

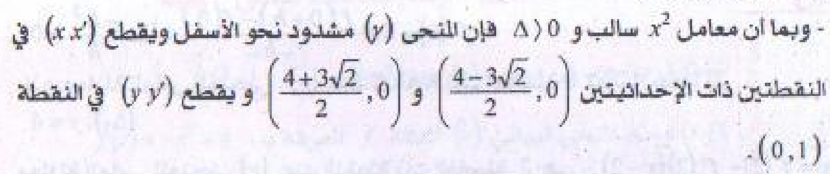
نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على IR ب : $f(x)=x^2+2x+1$ ، $g(x)=-2x^2+8x+1$

1) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحنيين (γ) و (γ') للدالتين f و g على الترتيب

2) ا) بين ان المنحنيين (γ) و (γ') يتقاطعان في نقطتين A و B حيث فاصلة A موجبة تماما ولتكن x_0

ب) اوجد قيمة العدد المشتق لـ : f و g عند العدد x_0 ثم ارسم المماسين لـ : (γ) و (γ') عند A

✓ الحل :



1) و بما أن الدالة f هي دالة كثير حدود من لدرجة الثانية فأن بيانها عبارة عن قطع مكافئ ذروته $(-1,0)$

□ وبما ان معامل x^2 موجب و $\Delta = 0$ فإن المنحى (γ) مشدود نحو الأعلى ويقطع ، $(x x')$ في النقطة ذات الإحداثيتين $(-1,0)$ و يقطع ؛ $(y y')$ في النقطة ذات الإحداثيتين $(0,1)$

□ بما ان الدالة g دالة كثير حدود من الدرجة الثانية فإن بيانها عبارة عن قطع مكافئ ذروته النقطة ذات الإحداثيتين $(2,9)$

- وبما أن معامل x^2 سالب و $\Delta > 0$ فإن المنحى (γ) مشدود نحو الأسفل ويقطع $(x x')$ في النقطتين ذات الإحداثيتين $\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2},0\right)$ و $\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2},0\right)$ و يقطع $(y y')$ في النقطة $(0,1)$.

2) ا) لتعيين نقاط تقاطع (γ) و (γ') نعين الأعداد الحقيقية x التي تحقق ؛ $f(x)=g(x)$ $f(x)=g(x)$ تكافئ ؛ $3x^2-6x=0$.

بعد حل المعادلة $3x^2-6x=0$ نجد ؛ $x=0$ أو $x=2$ ومنه المنحنيان (γ) و (γ') يتقاطعان في نقطتين A و B حيث فاصلة A هي ؛ 2 وفاصلة B هي 0

ب) العدد المشتق للدالة f عند العدد $x_0=2$ هو $f'(2)$.

$$f'(2)=\lim_{h\mapsto 0}(h+6)=6$$

العدد المشتق للدالة g عند العدد $x_0=2$ هو ؛ $g'(2)$ حيث ؛ $g'(2)=\lim_{h\mapsto 0}(-2h)=0$

- رسم المماسين

معادلة المماس للمنحني (γ) عند النقطة A هي ؛ $y=f(2)+f'(2)(x-2)$ بالتعويض نجد ؛ $y=9+6(x-2)$ بالتبسيط نجد ؛ $y=6x-3$.

معادلة المماس للمنحني (γ') عند النقطة A هي ؛ $y=g(2)+g'(2)(x-2)$ بالتعويض نجد؛ $y=9+0$ منه ؛ $y=9$.



تطبيق . 7 : تعيين معادلة منحني علم مماسه

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR ب ؛ $f(x)=ax^2+bx+3$ حيث ؛ a و b عددين حقيقيين

اوجد قيم a و b بحيث المنحى البياني للدالة f يقبل في النقطة $A(2,5)$ مماسا معامل توجيهه 2

✓ الحل :

بما ان النقطة A تنتمي إلى (γ) فإن ؛ $f(2)=5$ ومنه ينتج ؛ $4a+2b+3=5$ بالتبسيط نجد ؛ $4a+2b-2=0$ اي ؛ $2a+b-1=0$ ....(1)

بما ان معامل توجيه المماس للمنحى (γ) عند A يساوي 2 فإن $f'(2)=2$ الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا ؛ من اجل كل x من IR ؛ $f'(x)=2ax+b$ $f'(2)=2$ تكافئ ؛ $4a+b=2$ منه ؛ $b=2-4a$....(2)

بتعويض قيمة b في المساواة (1) نجد ؛ $2a+2-4a-1=0$ بالتبسيط نجد ؛ $-2a+1=0$ اي ؛ $a=\frac{1}{2}$ بالتعويض قيمة a في المساواة (2) نجد ؛ $b=0$

إذن ؛ f معرفة كما يلي ؛ $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3$.

تطبيق . 8 : تعيين معادلة قطع مكافئ علمت ذروته

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR ب؛ $f(x)=2x^2+ax+b$ حيث ؛ a و b عددين حقيقيين

اوجد a و b حتى يقبل المنحى (γ) الممثل للدالة f النقطة $A(1,0)$ كذروة له .

✓ الحل :

بما ان النقطة A تنتمي إلى (γ) فإن ؛ $f(1)=0$ $f(1)=0$ يكافئ ؛ $2+a+b=0$ ....(1)

بما ان A ذروة للمنحى (γ) فإن العدد المشتق للدالة f عند x_A يكون معدوما اي $f'(1)=0$ الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا ؛ من اجل كل x من IR ؛ $f'(x)=4x+a$ $f'(1)=0$ يكافئ ؛ $4+a=0$ ومنه ؛ $a=-4$ نعوض قيمة a في المساواة (1) نجد ؛ $b=2$

بالتالي الدالة f معرفة ب؛ $f(x)=2x^2-4x+2$.

تطبيق . 9 : التقريب التالفي لدالة — القيمة التقريبية

1) احسب العدد المشتق للدالة f المعرفة على IR بالعبارة : $f(x)=x^2$ عند العدد 4
2) اوجد تقريبا تالفيا للدالة f عند العدد 4 ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد $(4,02)^2$.

✓ الحل :

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x من IR ، $f'(x)=2x$
ومنه : $f'(4)=2\times4=8$

2) الدالة g المعرفة في جوار العدد 4 بـ : $h\xrightarrow{g} f(4)+f'(4)h$ هي التقريب التالفي للدالة f في جوار العدد 4
إذن : $g(h)=4^2+8h=16+8h$

- استنتاج قيمة تقريبية للعدد $(4,02)^2$:
$4,02=4+0,02$ اي $h=0,02$
لدينا : $f(4+h)=g(h)=16+8h$ ، كون $f(4+h)=(4,02)^2$
إذن $(4,02)^2=16+8\times0,02=16,16$
منه : $16,16$ هي القيمة التقريبية للعدد $(4,02)^2$ إلى 10^{-2}.

تطبيق . 10 : التقريب التالفي لدالة تناظرية — دالة sin - القيمة التقريبية

1) لتكن الدالة f المعرفة على IR بـ : $f(x)=\sin x$
ا) اوجد تقريبي تالفي للدالة f عند العدد $\frac{\pi}{6}$
ب) استنتج قيمة تقريبية للعدد $\sin\frac{31}{180}\pi$
2) لتكن الدالة g المعرفة على IR^* بالعبارة : $g(x)=\frac{1}{x^2}$
ا) احسب العدد المشتق للدالة g عند العدد 2
ب) استنتج تقريبا تالفيا للدالة g عند العدد 2
ج) احسب قيمة تقريبية للعدد $\frac{1}{(2,002)^2}$.

✓ الحل :

1) ا) الدالة f قابلة للاشتقاق على IR و لدينا من اجل كل x من IR ، $f'(x)=\cos x$
ومنه : $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ولدينا ، $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$
إذن الدالة : $h\mapsto\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}h$ هي التقريب التالفي للدالة f في جوار العدد $\frac{\pi}{6}$

ب) استنتاج قيمة تقريبية للعدد : $\sin\frac{31\pi}{180}$
$\frac{31\pi}{180}=\frac{30\pi}{180}+\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}$ ومنه ؛ $h=\frac{\pi}{180}$
لدينا : $f\left(\frac{\pi}{6}+h\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}h$ ومنه ، $\sin\frac{31\pi}{180}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\pi}{180}$ بعد الحساب نجد :
$\sin\frac{31\pi}{180}=0,54$

2) ا) الدالة g قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x من IR ؛ $g'(x)=\frac{-2}{x^3}$
ومنه : $g'(2)=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$

ب) لدينا: $g'(2)=\frac{-1}{4}$ و $g(2)=\frac{1}{4}$
الدالة : $h\mapsto\frac{1}{4}-\frac{1}{4}h$ هي التقريب التالفي للدالة g في جوار العدد 2

ج) استنتاج قيمة تقريبية للعدد $\frac{1}{(2,002)^2}$
بوضع : $x=2,002$ و $x_0=2$ نجد : $h=x-x_0=0,002$
لدينا : $g(2+h)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}h$ ومنه : $\frac{1}{(2,002)^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times0,002$ بالحساب نجد :
$\frac{1}{(2,002)^2}=0,2495$.

تطبيق . 11 : تعيين عبارة دالة علم تقريبها التالفي

f دالة معرفة على IR بـ : $f(x)=-x^2+bx-4$ حيث ، b عدد حقيقي
- اوجد العدد b بحيث الدالة f تقبل في نقطة فصلتها x_0 التقريب التالفي :
$h\mapsto -3+4h$

✓ الحل :

التقريب التالفي للدالة f في نقطة فاصلتها x_0 هي الدالة المعرفة بـ: $h \mapsto f(x_0)+f'(x_0)h$
وبالمطابقة نجد ، $f(x_0)=-3$ و $f'(x_0)=4$

$f(x_0)=-3$ تعني ، (1)...... $-x_0^2+bx_0-1=0$

$f'(x_0)=4$ تعني ، (2)...... $-2x_0+b=4$

من المعادلة (2) نجد ، $b=4+2x_0$ وبتعويض b في (1) نجد ، $-x_0^2+(4+2x_0)x_0-1=0$

بالتبسيط نجد ، $x_0^2+4x_0-1=0$.

بعد حل المعادلة ذات المجهول x_0 التالية $x_0^2+4x_0-1=0$ نجد ،

$x_0=-2+\sqrt{5}$, $x_0'=-2-\sqrt{5}$

- إذا كان ، $x_0=-2+\sqrt{5}$ فإن ، $b=2\sqrt{5}$.
- إذا كان $x_0'=-2-\sqrt{5}$ فإن ، $b=-2\sqrt{5}$.

تطبيق . 12 : حساب الخطأ المرتكب في التقريب التالفي

. لتكن f دالة معرفة على IR بـ: $f(x)=x^3$
1) أعط تقريبا تالفيا للدالة f بجوار العدد 1- .
2) تحقق أن لخطأ المرتكب في هذا التقريب هو ، $\vartheta(h)=h^2(h-3)$
3) بين أنه إذا كان ، $1 \geq h \geq -1$ فإن ، $\vartheta(h) \leq -2h^2$
4) باستعمال نتيجة السؤال 3) أوجد h بحيث:
أ) $\vartheta(h) \leq -1$ ، ب) $\vartheta(h) \leq -0{,}5$
5) أعط قيمة تقريبية للعدد $(-0{,}99)^3$ ثم احسب الخطأ المرتكب في هذا لتقريب .

✓ الحل :

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على IR و لدينا من اجل كل x من IR ، $f'(x)=3x^2$
و منه ، $f'(-1)=3$ و $f(-1)=-1$
الدالة ، $h \mapsto -1+3h$ هي التقريب التالفي للدالة f بجوار العدد 1-

2) الخطأ المرتكب في هذا التقريب هو : $\vartheta(h)$ حيث ،

$$\vartheta(h)=f(-1+h)-(-1+3h)$$
$$=(-1+h)^3+1-3h$$
$$=-1+3h-3h^2+h^3-3h+1$$

$$=-3h^2+h^3 \quad =h^2(-3+h)$$

3) اذا كان ، $1 \geq h \geq -1$ فإن ، $-2 \geq -3+h \geq -4$ وبضرب حدود هذه المتباينة في العدد h^2 نجد ، $-2h^2 \geq h^2(-3+h) \geq -4h^2$ ومنه نستنتج ان ، $\vartheta(h) \leq -2h^2$

4) أ) لدينا ، $\vartheta(h) \leq -2h^2$

حتى يكون $\vartheta(h) \leq -1$ يجب ان يكون $-2h^2 \leq -1$ ومنه نجد ، $h^2 \geq \frac{1}{2}$.

$h^2 \geq \frac{1}{2}$ يكافئ ، $h \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}} , 1\right]$ او $h \in \left[-1 , \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$ وبالتالي حتى يكون ، $\vartheta(h) \leq -1$

يجب أن يكون ، $h \in \left[-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}} , 1\right]$.

ب) حتى يكون ، $\vartheta(h) \leq -0{,}5$ يجب أن يكون ، $-2h^2 \leq -0{,}5$

و منه نجد ، $h^2 \geq \frac{0{,}5}{2}$ اي ، $h^2 \geq 0{,}25$

$h^2 \geq 0{,}25$ يكافئ ، $h \in [-1,-0{,}5[\cup [0{,}5 , 1]$

* بوضع ، $x=-0{,}99$ و $x_0=-1$ نجد ، $h=x-x_0=0{,}01$

$f(-1+h)=-1+3h$ وبتعويض قيمة h نجد $(-0{,}99)^3=-1+3\times10^{-2}=-1+0{,}03$

ومنه ، $(-0{,}99)^3=-0{,}97$.

الخطأ المرتكب هو ، $\vartheta(0{,}01)=10^{-4}(-3+10^{-2})$ ، بالحساب نجد ، $\vartheta(0{,}01)=-2{,}99\times10^{-4}$

تطبيق . 13 : القطوع الكافئة الماسة لمستقيم في نقطة

في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، (Δ) المستقيم ذوا المعادلة ، $y=x+3$
و A نقطة من (Δ) فاصلتها معدومة.
نريد تعيين كل القطوع المكافئة (γ) ذات المعادلة ، $y=ax^2+bx+c$
حيث ، $a\neq0$ و b ، c عددين حقيقيين ، المماسة لـ (Δ) عند النقطة ، A
1) بين ان المعادلة (γ) تكتب على الشكل ، $y=ax^2+x+3$
2) (x_0 , y_0) هما احداثيا ذروة القطع المكافئ (γ)
اوجد علاقة مستقلة عن a تربط y_0 و x_0 ثم استنتج أن هذه الذروات تنتمي إلى منحى يطلب تعيينه .
3) ارسم القطعين المكافئين اللذين معادلتهما ،
$y=\frac{1}{2}x^2+x+3$ ، $y=-\frac{1}{2}x^2+x+3$.

✓ الحل :

1) احداثيا النقطة A هما $(0,3)$ نضع : $f(x)=ax^2+bx+c$

بما أن : A هي نقطة التماس لـ : (γ) و (Δ) فإن : $f(0)=3$ و $f'(0)=1$

$f(0)=3$ تكافئ $c=3$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x من IR ؛ $f'(x)=2ax+b$.

$f'(0)=1$ تكافئ $b=1$ ومنه معادلة (γ) هي من الشكل : $y=f(x)=ax^2+x+3$

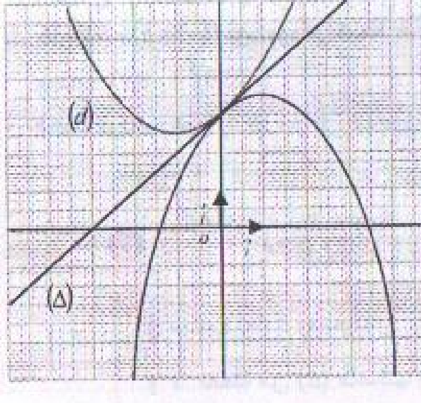
2) بما ان (x_0,y_0) هي إحداثيتي الذروة فإن $f(x_0)=y_0$ و $f'(x_0)=0$

$f'(x_0)=0$ تكافئ : $2ax_0+1=0$ ومنه : $a=\frac{-1}{2x_0}$ ، مع $x_0\neq 0$ وبتعويض x_0 في عبارة $f(x_0)$ نجد : $y_0=f(x_0)=\frac{-1}{2x_0}\times x_0^2+x_0+3$ بالتبسيط نجد : $y_0=\frac{1}{2}x_0+3$

النقط ذات الإحداثيتين (x_0,y_0) تنتمي إلى المستقيم (d) ذو المعادلة : $y=\frac{1}{2}x+3$

3) رسم القطعين المكافئين ذوي المعادلة :

$y=\frac{1}{2}x^2+x+3$ ، $y=-\frac{1}{2}x^2+x+3$



- حالة القطع ذوا المعادلة : $y=\frac{1}{2}x^2+x+3$

$a=-\frac{1}{2x_0}=\frac{-1}{2}$ منه $x_0=-1$ بالتعويض في معادلة (d) نجد $y_0=2,5$ منه $(-1,\ 2,5)$ هي إحداثيتي ذروة القطع المكافئ في هذه الحالة

بما أن : $a>0$ فإن القطع المكافئ يكون مشدود نحو الأعلى ، وبما أن $\Delta<0$ فإن القطع المكافئ لا يقطع (xx')

- حالة القطع ذوا المعادلة : $y=-\frac{1}{2}x^2+x+3$

$a=-\frac{1}{2x_0}=\frac{-1}{2}$ منه : $x_0=1$ بالتعويض في معادلة (d) نجد : $y_0=3,5$ منه $(1\ ,3,5)$ هي إحداثيتي ذروة القطع المكافئ في هذه الحالة

بما أن $a<0$ فإن القطع المكافئ مشدود نحو الأسفل

وبما أن : $\Delta>0$ فإن القطع المكافئ يقطع (xx') في نقطتين فاصلتهما : $1-\sqrt{5}$, $1+\sqrt{5}$

تطبيق . 14 : حساب مشتق دوال

- احسب $f'(x)$ محددا مجموعة قيم x التي من اجلها يكون هذا الحساب ممكنا في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\frac{2x+5}{1-x}$ 2) $f(x)=\frac{1-x^2}{2x+3}$ 3) $f(x)=\frac{1}{x}-3x^2$

4) $f(x)=5x-1+\frac{1}{x+2}$ 5) $f(x)=x\sin x$ 6) $f(x)=\frac{x}{\cos x}$.

✓ الحل :

1) مجموعة تعريف الدالة f هي : $D=IR-\{1\}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على D ولدينا من اجل كل x من D ؛

$$f'(x)=\frac{2(1-x)-(-1)(2x+5)}{(1-x)^2}=\frac{2-2x+2x+5}{(1-x)^2}=\frac{7}{(1-x)^2}$$

2) مجموعة تعريف الدالة f هي : $D=IR-\left\{\frac{-3}{2}\right\}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على D ولدينا من اجل كل x من D ؛

$$f'(x)=\frac{(-2x)(2x+3)-(2)(1-x^2)}{(2x+3)^2}$$

$$=\frac{-4x^2-6x-2+2x^2}{(2x+3)^2}=\frac{-2x^2-6x-2}{(2x+3)^2}$$

3) مجموعة تعريف الدالة f هي : $D=IR-\{0\}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على D

ولدينا : من اجل كل x من D $f'(x)=\frac{-1}{x^2}-6x$

4) مجموعة تعريف الدالة f هي : $D=IR-\{-2\}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على D ولدينا من اجل كل x من D ؛

$$f'(x)=5-\frac{0\times(x+2)-(1)(1)}{(x+2)^2}=5+\frac{1}{(x+2)^2}$$

5) الدالة f معرفة على IR وقابلة للاشتقاق على IR

و لدينا من اجل كل x من IR ؛ $f'(x)=(1)(\sin x)+(\cos x)(x)=\sin x+x\cos x$

6) مجموعة تعريف الدالة f هي مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث : $\cos x\neq 0$.

$\cos x=0$ تكافئ : $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث : $k\in z$ ومنه مجموعة تعريف الدالة f هي

$D=IR-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \ , \ k\in z\right\}$ ومن اجل كل x من D لدينا :

$$f'(x)=\frac{(1)(\cos x)-(-\sin x)x}{(\cos x)^2}=\frac{\cos x-x\sin x}{\cos^2 x}$$

تطبيق - 15 : تعيين مجال الذي تكون فيه الدالة قابلة للاشتقاق – حساب المشتق

- عين في كل حالة من الحالات التالية مجموعة قيم x بحيث يكون f قابلة للاشتقاق ، ثم احسب $f'(x)$

1) $f(x)=\frac{2x^2+3x+2}{2x-1}$ ، 2) $f(x)=4x-1+\frac{1}{x+2}$

3) $f(x)=\frac{3x+2}{-x-2}$ ، 4) $f(x)=(x^2+1)\sin x$

5) $f(x)=\frac{1-x}{2}+\frac{x^2-3x}{3}$ ، 6) $f(x)=(x-2)(x^2+3x-1)$

الحل :

1) الدالة f تكتب على الشكل : $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$

الدالة u قابلة للاشتقاق على IR و v قابلة للاشتقاق على IR ومن اجل كل x من IR بحيث : $x\neq\frac{1}{2}$

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$$

$$=\frac{(4x+3)(2x-1)-2(2x^2+3x+2)}{(2x-1)^2}=\frac{4x^2-4x-7}{(2x-1)^2}$$

إذن من اجل كل x من $IR-\left\{\frac{1}{2}\right\}$: $f'(x)=\frac{4x^2-4x-7}{(2x-1)^2}$

2) الدالة f تكتب على الشكل : $f(x)=u(x)+v(x)$ حيث :

$u(x)=4x-1$ و $v(x)=\frac{1}{x+2}$

الدالة u قابلة للاشتقاق على IR والدالة v قابلة للاشتقاق على : $IR-\{2\}$ ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على : $IR\cap IR-\{-2\}$ اي : $IR-\{-2\}$

ولدينا من اجل كل x من $IR-\{-2\}$: $f'(x)=u'(x)+v'(x)=4-\frac{1}{(x+2)^2}$

3) $f(x)=\frac{3x+2}{-x-2}$ بوضع : $u(x)=3x+2$ و $v(x)=-x-2$

تصبح : $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$

الدالتين v و u قابلتين للاشتقاق على IR ومن اجل كل x من IR بحيث : $x\neq -2$ لدينا

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$$

$$=\frac{3(-x-2)-(-1)(3x+2)}{(-x-2)^2}=\frac{-4}{(-x-2)^2}$$

إذن من اجل كل : $x\in IR-\{-2\}$ لدينا : $f'(x)=\frac{-4}{(-x-2)^2}$

4) $f(x)=(x^2+1)\sin x$ بوضع : $u(x)=x^2+1$ و $v(x)=\sin x$ تصبح :

$f(x)=u(x)v(x)$

الدالتين v و u قابلتين للاشتقاق على IR ومنه الدالة $f=uv$ قابلة للاشتقاق على IR

ولدينا من اجل كل x من IR

$$f(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$$

$$=2x\sin x+(\cos x)(x^2+1)$$

$$2x\sin x+(x^2+1)\cos x$$

5) بوضع : $u(x)=\frac{1-x}{2}$ ، $v(x)=\frac{x^2-3x}{3}$

تصبح : $f(x)$ على شكل : $f(x)=u(x)+v(x)$ الدالتين v و u قابلتين للاشتقاق على IR

ومنه الدالة : $f=u+v$ قابلة للاشتقاق على IR

ولدينا : من اجل كل x من IR :

$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2x-3}{3}=-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}x$$

6) بوضع : $u(x)=x-2$ و $v(x)=x^2+3x-1$ تصبح $f(x)$ كما يلي :

$f(x)=u(x)v(x)$.

الدالتين u و v قابلتين للاشتقاق على IR وبالتالي الدالة $f=u\times v$ قابلة للاشتقاق على IR ولدينا : من اجل كل x من IR :

$$f'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$$

$$=(1)(x^2+3x-1)+(2x+3)(x-2)$$

$$= x^2+3x-1+2x^2-x-6 = 3x^2+2x-7$$

7) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-5x+6}$

بوضع : $u(x)=x^2+3x+2$ و $v(x)=x^2-5x+6$ الدالة f تصبح : $f=\dfrac{u}{v}$

الدالتين : u و v قابلتين للاشتقاق على IR ؛

$v(x)=x^2-5x+6=0$ يكافئ : $x=4$ او $x=3$.

ومن اجل كل : x من IR بحيث : $v(x)\neq 0$:

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$$

$$=\frac{(2x+3)(x^2-5x+6)-(2x-5)(x^2+3x+2)}{(x^2-5x+6)^2}=\frac{-8x^2+8x+28}{(x-5x+6)^2}$$

اذن من اجل كل x من $IR-\{3,4\}$ ؛ $f'(x)=\dfrac{-8x^2+8x+28}{(x^2-5x+6)^2}$.

تطبيق . 16 : تعيين معادلة منحني يقبل مماسا يعامد مستقيم معلوم

عين مجموعة قيم m بحيث المنحى ذوا المعادلة ؛ $y=\dfrac{mx-2}{(x+2m)}$ يقبل عند النقطة A ذات الفاصلة (-1) مماس يعامد المستقيم ذوا المعادلة ؛ $y=-2x-2$.

✓الحل :

الدالة f حيث : $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق على ، $D=IR-\{-2m\}$ ؛

ولدينا من اجل كل x من D :

$$f'(x)=\frac{m(x+2m)-(1)(mx-2)}{(x+2m)^2}$$

$$=\frac{mx+2m^2-mx+2}{(x+2m)^2}=\frac{2m^2+2}{(x+2m)^2}$$

$$f'(-1)=\frac{2m^2+2}{(-1+2m)^2}=\frac{2m^2+2}{1-4m+4m^2}$$



المماس للمنحى الممثل للدالة f يعامد المستقيم ذوا المعادلة : $y=-2x-2$ هذا يعني أن :

$$-f'(-1)\times 2=-1$$

$$-f'(-1)\times 2=\frac{-4m^2-4}{4m^2-4m+1}$$

$-f'(-1)\times 2=-1$ يكافئ : $-4m^2-4=-4m^2+4m-1$

بالتبسيط نجد : $4m+3=0$ ، منه $m=\dfrac{-3}{4}$

إذن حتى يقبل المنحني مماس عند النقطة ذات الفاصلة -1 يعامد المستقيم ذو المعادلة $y=-2x-2$ يجب أن يكون : $m=\dfrac{-3}{4}$

تطبيق . 17 : حساب مشتق دالة بعد كتابتها على شكل مركب دالتين

لتكن f دالة معرفة على $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=\sqrt{x^2-9}$ ، نريد حساب $f'(x)$ التي نفرض وجودها على مجموعة تعريف f

لتكن الدالة u المعرفة على IR بـ: $u(x)=x^2-9$

1) اكتب u' بدلالة f و f'

ثم استنتج f' بدلالة u' و f

2) احسب $u'(x)$ ثم $f'(x)$

✓الحل :

1) نلاحظ ان : $u(x)=(f(x))^2$ ، من اجل كل x من المجموعة :

$D=]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$

الدالة u هي دالة مركبة من الدالة f متبوعة بالدالة مربع V اي : $U=(V o f)$

حيث : $V(x)=x^2$

إذن : من اجل كل x من D لدينا :

$$U'(x)=(V o f)'(x)$$
$$=f'(x)\times V'(f(x))$$
$$=f'(x)\times(2f(x))$$
$$=2f'(x)f(x)$$

إذن : $U'=2f'\times f$

من المساواة : $U'=2f'\times f$ نجد : $f'=\dfrac{U'}{2f}$

2) من اجل كل x من D لدينا : $U'(x)=2x$

و من من اجل كل x من D لدينا : $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$.

تطبيق . 18 : دراسة قابلية اشتقاق دالة

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\left|x^2-4\right|$.

✓ الحل :

كتابة : $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة :

x	$-\infty$ -2 2 $+\infty$
(x^2-4)	+ 0 - 0 +

- إذا كان : $x \in]-\infty , -2] \cup [2 , +\infty[$ فإن : $x^2-4 \geq 0$ ومنه : $f(x)=(x^2-4)$.
- إذا كان : $x \in]-2 , 2[$ فإن $x^2-4 < 0$ ومنه : $f(x)=-(x^2-4)$

الدالة : $x \mapsto x^2-4$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty , -2[\cup]2 , +\infty[$

والدالة $x \mapsto -(x^2-4)$ قابلة للاشتقاق $]-2 , 2[$ بالتالي الدالة f قابلة للاشتقاق على $IR-\{-2,2\}$ يبقى لنا دراسة قابلية الاشتقاق f عند : 2 ، -2.

* قابلية الاشتقاق f عند -2

بوضع : $x_0=-2$ و $x=-2+h$ نجد : $t(h)=\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$$=\frac{\left|(-2+h)^2-4\right|-0}{h}=\frac{\left|h^2-4h\right|}{h}=\frac{|h|\,|h-4|}{h}$$

$$\lim_{h \xrightarrow{<} 0} t(h)=\lim_{h \xrightarrow{<} 0}\frac{-h|h-4|}{h}=\lim_{h \xrightarrow{<} 0} -|h-4|=-4$$

$$\lim_{h \xrightarrow{>} 0} t(h)=\lim_{h \longrightarrow 0}\frac{h|h-4|}{h}=\lim_{h \xrightarrow{>} 0}|h-4|=4$$

بما أن $\lim_{h \to 0} t(h)$ ليست وحيدة فإن : f غير قابلة للاشتقاق عند : $x_0=-2$

* قابلية الاشتقاق عند 2

بوضع : $x_0=2$ و $x=2+h$ نجد : $t(h)=\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{\left|h^2+4h\right|}{h}=\dfrac{|h|\,|h+4|}{h}$

$$\lim_{h \xrightarrow{<} 0} t(h)=\lim_{h \xrightarrow{<} 0}\frac{-h|h+4|}{h}=\lim_{h \xrightarrow{<} 0} -|h+4|=-4$$

$$\lim_{h \xrightarrow{>} 0} t(h)=\lim_{h \xrightarrow{>} 0}\frac{h|h+4|}{h}\ \lim_{h \xrightarrow{>} 0}|h+4|=4$$

بما ان $\lim_{h \mapsto 0} t(h)$ ليست وحيدة فإن : f غير قابلة للاشتقاق عند : $x_0=2$

تطبيق . 19 : مماس مشترك لمنحنيين

ليكن : (γ_1) و (γ_2) قطعين مكافئين معادلتهما على التوالي :
$y=-x^2+4x+6$ و $y=x^2-14x+51$.
بين ان المماس (Δ) للمنحى (γ_1) في النقطة : $A(3,9)$
يمس (γ_2) في النقطة B يطلب تعيينها ثم ارسم (γ_1) و (γ_2) و (Δ) في نفس المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

✓ الحل :

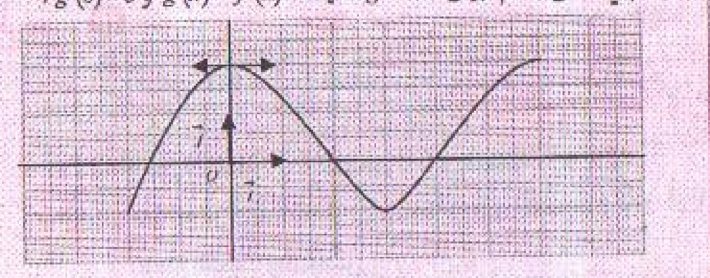
نضع : $f(x)=-x^2+4x+6$ و
$g(x)=x^2-14x+51$
معادلة المماس لـ: (γ_1)
عند: A هي من الشكل :
$y=f(3)+f'(3)(x-3)$
بالتعويض نجد :
$y=9+(-2)(x-3)$
بعد التبسيط نجد :
$(\Delta): y=-2x+15$
نفرض ان المماس (Δ)
يمس (γ_2) في النقطة :
$B(x_0 , y_0)$ ،
ومنه : $g'(x_0)=-2$
$g'(x_0)=-2$ تكافئ : $2x_0-14=-2$ تكافئ : $x_0=6$
وبالتالي : $y_0=g(6)=3$
إذن المماس (Δ) للمنحى (γ_1) عند A يمس أيضا (γ_2) في النقطة B حيث : $B(6,3)$.

تطبيق . 20 : رسم بيان دالة علم مشتقها ونقطة من بيانها

إليك التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

كما هو مبين في الشكل المجاور .

- ارسم في نفس المعلم بيان الدالة g حيث : $g'(x)=f'(x)$ و $g(0)=3$.

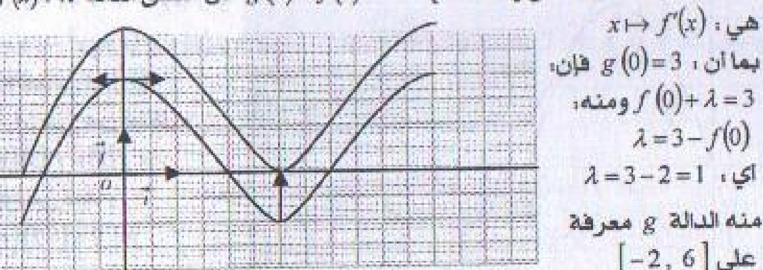


✓ الحل :

لدينا : من اجل كل x من $[-2, 6]$: $f'(x)=g'(x)$

إذن من اجل كل x من $[-2, 6]$: $g(x)=f(x)+\lambda$ لان مشتق الدالة $x\mapsto f(x)+\lambda$

هي : $x\mapsto f'(x)$



بما ان : $g(0)=3$ فإن:

$f(0)+\lambda=3$ ومنه:

$\lambda=3-f(0)$

اي : $\lambda=3-2=1$

منه الدالة g معرفة على $[-2, 6]$

كما يلي : $g(x)=f(x)+1$ نتحصل على بيان الدالة g

بسحب المنحنى الممثل للدالة f بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{u}(0,1)=\vec{j}$.

تطبيق . 21 : تعيين قطع مكافئ علمت نقطة ومماسين له

f دالة معرفة على IR بالعبارة : $f(x)=ax^2+bx+c$

عين الأعداد الحقيقية : c, b, a بحيث : $f(1)=12$ و $f'(1)=13$

والمستقيم ذو المعادلة : $y=-3x+1$ مماس للمنحنى الممثل للدالة f .

✓ الحل :

$f(1)=12$ تكافئ : $a+b+c=12$.......(1)

$f'(1)=13$ تكافئ : $2a+b=13$........(2)

المستقيم ذو المعادلة $y=-3x+1$ مماس للمنحنى (γ) هذا معناه ان :

الجملة ذات المتغيرين (x, y) لها حل وحيد (1)...... $\begin{cases} y=f(x) \\ y=-3x+1 \end{cases}$

من (1) و (2) نجد : $b=13-2a$, $c=12-a-b$

$c=12-a-13+2a$ اي : $c=a-1$ وبالتالي : $f(x)=ax^2+(13-2a)x+a-1$

الجملة (1) تكتب على الشكل : $\begin{cases} y=ax^2+(13-2a)x+a-1 \\ y=-3x+1 \end{cases}$

حتى يكون للجملة (1) حل وحيد يجب ان يكون للمعادلة :

$ax^2+(13-2a)x+a-1=-3x+1$ حل وحيد

بعد التبسيط هذه المعادلة نجد : $ax^2+(16-2a)x+a-2=0$

$\Delta=(8-a)^2-(a-2)a$ منه $\Delta=64-16a+a^2-a^2+2a=-14a+64$

$\Delta=0$ يكافئ : $a=\frac{64}{14}=\frac{32}{7}$

إذن الدالة f المطلوبة هي : $f(x)=\frac{32}{7}x^2+\left(\frac{27}{7}x\right)+\frac{25}{7}$

تطبيق . 22 : تعيين مماس لمنحني علم ميله

لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR ب :

$f(x)=x^2+2x$ ، وليكن (γ) المنحى البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

برهن ان (γ) يقبل مماس وحيد معامل توجيهه 3، ثم عين إحداثيتي نقطة التماس ومعادلة المماس .

✓ الحل :

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x من IR : $f'(x)=2x+2$

بما ان للمماس معامل توجيهه 3 فإن معادلته من الشكل : $y=3x+\alpha$ ، $\alpha\in IR$

(Δ) مماس للمنحني (γ) هذا معناه ان $f'(x_0)=3$ حيث : x_0 فاصلة نقطة التماس

$f'(x_0)=3$ تكافئ: $2x_0+2=3$ ومنه: $x_0=\frac{1}{2}$

منه توجد نقطة وحيدة $M_0(x_0, y_0)$ من (γ) يكون فيها (Δ) مماس

$y_0=f(x_0)$ منه، $y_0=\frac{5}{4}$ وبالتالي: $M_0\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$

- بما أن M_0 تنتمي إلى (Δ) فإن $y_0=3x_0+\alpha$ منه: $\alpha=y_0-3x_0$

بالتعويض نجد: $\alpha=\frac{5}{4}-3\times\frac{1}{2}$ بعد الحساب نجد: $\alpha=-\frac{1}{4}$

- إذن: $(\Delta): y=3x-\frac{1}{4}$.

تمارين و مسائل

1 هل الدوال التالية قابلة للاشتقاق عند a إذا كان كذلك فأوجد قيمة العدد المشتق عندئذ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=-6x+6$ ، $a=5$

2) $f(x)=-x^2+5-3$ ، $a=2$

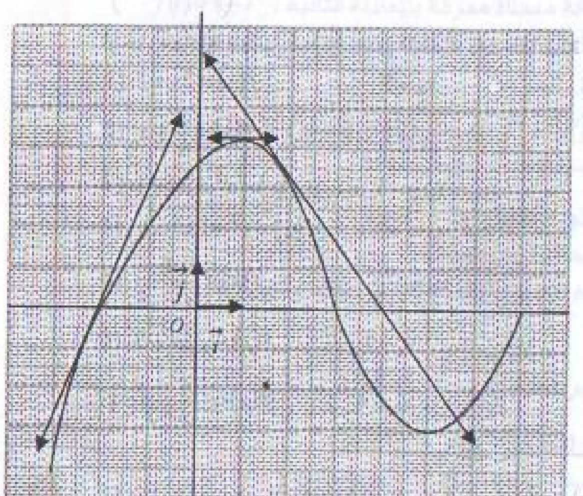
3) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ ، $a=0$

4) $f(x)=-x^3-1$ ، $a\in IR$

5) $f(x)=\frac{4}{x}$ ، $a\in IR^*$.

2 ليكن (γ) المنحنى البياني للدالة f في مستوي منسوب على معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

قمنا برسم المماسات لـ: (γ) في نقط معطاة كما هو موضح في الشكل:



1) احسب:

$f(2)$، $f(-2)$ ، $f(1)$

2) احسب:

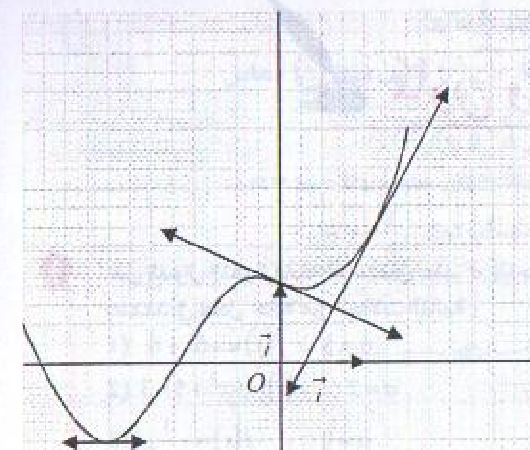
$f'(2)$، $f'(-2)$ ، $f'(1)$

ثم أوجد معادلة المماسات في النقط التي فواصلها:

1 ، -2 ، 2.

3 ليكن (γ) المنحى البياني للدالة f كما هو موضح في الشكل المجاور .

في كل نقطة محددة في الشكل ، المنحى (γ) يقبل مماسا عندها



1) احسب :

$f(1),\ f(-2),\ f(0)$

2) احسب :

$f'(1),\ f'(-2),\ f'(0)$ ثم أوجد معادلات المماس لـ: (γ) عند النقط ذات الفواصل :

$1\ ,\ -2\ ,\ 0$

3) استنتج التقريبات التالية لـ: $f(-2+h)$ و $f(1+h)$ و $f(0+h)$.

---

4 ليكن (γ) المنحنى البياني للدالة f في مستوي منسوب على معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$.

اوجد معادلة المماس لـ: (γ) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=2x+1$ ، $x_0=5$

2) $f(x)=\dfrac{2}{x}+x$ ، $x_0=2$

3) $f(x)=x^2+3x-1$ ، $x_0=-1$

4) $f(x)=x^3+2x^2+1$ ، $x_0=-2$

5) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$ ، $x_0=-\dfrac{1}{2}$

6) $f(x)=\sqrt{2x+3}$ ، $x_0=1$

7) $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x+2}$ ، $x_0=4$

---

5 1) مثل المنحنى البياني للدالة f المعرفة بـ : $f(x)=x^2-1$

في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$

2) x_0 عدد حقيقي . بين ان الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 ثم احسب $f'(x_0)$.

3) ارسم المماسات لـ (γ) عند النقط ذات الفواصل : $0\ ,\ 2\ ,\ -1\ ,\ 1$

---

6 1) مثل في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ المنحنى البياني للدالة f المعرفة على IR بالشكل : $f(x)=-x^2+4x$

2) احسب العدد المشتق للدالة f عند العدد 1 وأرسم المماس للمنحني (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

---

7 المستقيم ذو المعادلة $y=3x-2$ هو المماس للمنحى (γ) الممثل للدالة f في النقطة A ذات الفاصلة 2 .

-احسب $f(2)$ و $f'(2)$.

---

8 1) من أجل كل الدوال التالية احسب العدد المشتق عند النقطة ذات الفاصلة : $x=2$

حيث $f(x)=4x^2-1$ ، $g(x)=12-3x^2$ ، $h(x)=\dfrac{2}{x}$

2) عين معادلة المماس لكل منحى عند النقطة ذات الفاصلة 2

---

9 لتكن f دالة زمنية لحركة معطاة معرفة بالمعادلة التالية : $f(t)=8-t^2$

1) احسب السرعة اللحظية عند اللحظة $t_0=3$ وعند اللحظة $t_1=+2$

2) أرسم المنحنى البياني الممثل للسرعة

3) احسب $f''(t)$ حيث : $f''=(f')'$ يسمى $f''(t)$ التسارع اللحظي)

---

10 ليكن : (γ) القطع المكافئ ذو المعادلة : $y=x^2+2x$

1) بين انه يمكن اختيار قيمة لـ : p بحيث:

المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x+p$ يقطع (γ) في نقطة وحيدة A .

أوجد عندئذ إحداثيات A

2) أرسم (γ) و (Δ) في نفس المعلم $\left(O,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$.

3) بين أن : (Δ) هو مماس للمنحنى (γ)

---

11 لتكن f دالة معرفة على IR بالعبارة : $f(x)=x^2$

1) أحسب العدد المشتق عند 3

2) اعط تقريبا تألفيا للدالة f بجوار 3 ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد $(3{,}001)^2$

3) ا) أعط تقريبا تآلفيا بجوار الواحد

ب) أحسب الخطأ المرتب في هذا التقريب

ج) بين انه إذا كان : $|h| \leq 10^{-p}$ ، حيث : $p \in N$ ، فإن : $0 \leq f(1+h)-(1+2h) \leq 10^{-2p}$

ثم أستنتج : حصرا للعدد $(1{,}0001)^2$

---

12 لتكن الدالة f المعرفة على IR ب : $f(x)=\sqrt{x^2+7}$

1) أحسب العدد المشتق للدالة f عند العدد 3

2) أعط تقريبا تآلفيا للدالة f بجوار 3

3) أحسب قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{(3{,}001)^2+7}$.

---

13 لتكن لدالة f المعرفة على IR ب : $f(x)=\cos x$

1) أحسب العدد المشتق للدالة f عند العدد $\frac{\pi}{3}$

2) أعط تقريبا تآلفيا للدالة f بجوار $\frac{\pi}{3}$ ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد

$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)$

---

14 f دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\sqrt{x}$

1) أعط تقريبا تآلفيا للدالة f بجوار العدد 1 ثم أحسب قيمة الخطأ المرتكب في هذا التقريب أي : $\left(f(1+h)-\left(f(1)+f'(1)h\right)\right)$

2) استنتج انه من أجل كل : $h \geq 0$ يكون :

$$\left|f(1+h)-\left(f(1)+f'(1)\times h\right)\right| \leq \frac{h^2}{8}$$

3) أعط القيم التقريبية للأعداد التالية : $\sqrt{1{,}0001}$ ، $\sqrt{1{,}00001}$

---

15 هل توجد دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة بحيث : منحاها البياني يمر من النقطتين $A\ (0\ ,\ 1)$ ، $B(2,-3)$

وبحيث المماس للمنحني (γ) عند هاتين النقطتين يكون ، موازي لـ : (xx')

---

16 اوجد مجموعة قيم m الحقيقية التي من اجلها المنحى البياني للدالة f المعرفة ب :

$f(x)=\frac{2(m+1)x+1}{(m+2)x+3}$ في معلم متعامد ومتجانس

يقبل النقطة التي فاصلتها 1- مماسا معادلته : $y=\frac{3}{2}x+6$ ،

17 في معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ، ليكن (γ) القطع المكافئ الذي معادلته : $y=x^2$ ، M نقطة من (γ) فاصلتها غير معدومة

(Δ) هو المماس للمنحني (γ) في النقطة M فاصلتها a ، المستقيم (d) العمودي على (Δ) في النقطة M يقطع محور التراتيب في النقطة I ولتكن k المسقط العمودي للنقطة M على (yy')

1) ارسم الشكل الذي يتظمن المعطيات السابقة

2) أوجد معادلة (Δ) و (d) ثم استنتج احداثيتا I و k

3) أحسب الطول Ik ماذا تستنتج ؟

---

18 نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR ب : $f(x)=-x^2+4x-1$ ، (γ) المنحى البياني للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس : $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

x_0 عدد حقيقي معطى ولتكن النقطة A من (γ) فاصلتها x_0

1) بين ان معادلة المماس للمنحني (γ) عند A هي : $y=(4-2a)x+a^2-1$

2) استنتج العدد المشتق للدالة f عند النقطة $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$

واعط معادلة المماس في هذه الحالة

---

19 1) ارسم (γ) القطع الزائد ذو المعادلة $y=\frac{1}{x}$ من أجل $x \rangle 0$

لتكن M نقطة من (γ) فاصلتها x_0 حيث : $x_0 \rangle 0$

2) اكتب بدلالة x_0 معادلة المماس في النقطة M للمنحى (γ) .

3) المماس في النقطة M يقطع المحاور الإحداثيات في النقطتين A و B

أكتب بدلالة x_0 إحداثيات A و B

---

20 لتكن الدالة f المعرفة على IR بالعبارة : $f(x)=ax^2+bx+c$

حيث : $c\ ,\ b\ ,\ a$ أعداد حقيقية وليكن (γ) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) عين الدالة f علما أن : (γ) يقطع (xx') في النقطة A فاصلتها 3 ويقطع (yy') في النقطة B ترتيبها 2 وان (γ) يقبل مماس عند B معادلته : $y=2x+2$

2) عين فاصلة نقطة التقاطع الثانية للمنحني (γ) مع (xx')

---

21 في معلم متعامد ومتجانس : $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ، (γ) القطع المكافئ ذوا المعادلة
$y = x^2 - 3x + 3$

(Δ) هو المستقيم ذوا المعادلة : $y = \frac{1}{2}$ و F نقطة احداثيها $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

1) ارسم (γ) و (Δ) وعين F على الرسم

2) p_0 نقطة من (γ) فاصلتها x_0 تختلف عن $\frac{3}{2}$.

H_0 هي المسقط العمودي لـ: p_0 على (Δ) و A_0 هي منتصف القطعة $[FH_0]$

ا) احسب بدلالة x_0 إحداثيات H_0 و A_0

ب) احسب بدلالة x_0 معامل توجيه المستقيم $(A_0\ P_0)$.

ج) استنتج ان المستقيم $(A_0\ P_0)$ هو المماس للمنحني (γ) في النقطة p_0

---

29 ادرس قابلية اشتقاق الدوال التالية على مجال تعريفها :

1) $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$ (3 $f(x) = \frac{2x+1}{|x|+2}$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ (4 $f(x) = x + 3|x| - 2$. (5 $f(x) = 2x - \frac{1}{|x|}$

---

30 لتكن الدالة العددية f كما يلي :

- إذا كان $x \geq 0$: $f(x) = (x-2)^2$

- إذا كان $x \langle 0$: $f(x) = (x+2)^2$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f

2) أدرس شفعية الدالة f

3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد : $x_0 = 0$

4) احسب $f'(x)$ من أجل كل x تنمي إلى : $IR - \{0\}$ ثم احسب قيمة :
$g'(-x) + g'(x)$.

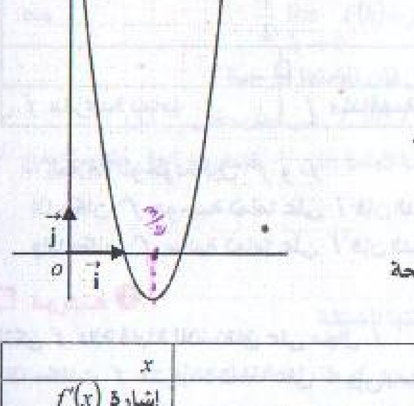
الدرس : 4

تطبيقات الاشتقاق

1 - إشارة مشتق واتجاه تغير دالة

مثال

ليكن (γ) النحنى البياني للدالة f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ كما هو مبين في الشكل الجاور



1) من الشكل عين :

- عدد حقيقي a بحيث : $f'(a) \rangle 0$

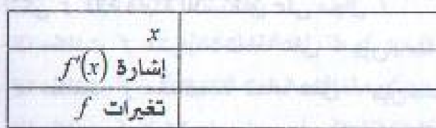
- عدد حقيقي b بحيث : $f'(b) \langle 0$

- عدد حقيقي c بحيث : $f'(c) = 0$

2) ا) أوجد الدالة المشتقة للدالة f
علما ان $f(x) = 4x^2 - 12x + 8$

ب) عين إشارة $f'(x)$ ثم تحقق من صحة الأجوبة الموضوعة في السؤال (1)

ج) أكمل الجدول التالي:
ثم استنتج العلاقة بين إشارة $f'(x)$ واتجاه تغير الدالة f



x	
إشارة $f'(x)$	
تغيرات f	

✓ الحل :

1) أ) من اجل كل x من المجال $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ ، المنحى يقبل مماس معامل توجيهه موجب وبالتالي من اجل $x=2$ يكون ، $f'(2)>0$

ب) من اجل كل x من $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[$ المنحى يقبل مماس معامل توجيهه سالب وبالتالي من اجل $x=1$ يكون $f'(1)<0$

- المنحى (γ) يقبل مماس يوازي محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{3}{2}$ وبالتالي $f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$

2) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا: من اجل كل x من IR ، $f'(x)=8x-12$

ب) - $f'(x)=0$ يكافئ ، $x=\frac{3}{2}$

- إذا كان $x>\frac{3}{2}$ فإن ، $f'(x)>0$ و إذا كان $x<\frac{3}{2}$ فإن $f'(x)<0$

التحقق من صحة الأجوبة السؤال 1)

- بما ان ، $x=1$ و $1<\frac{3}{2}$ فإن ، $f'(1)<0$

- بما ان ، $x=2$ و $2>\frac{3}{2}$ فإن ، $f'(2)>0$

جـ)

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات الدالة f	f متناقصة تماما		f متزايدة تماما

- العلاقة الموجودة بين f' و f

إذا كان f' موجبة تماما على I فإن الدالة f تكون متزايدة تماما على I

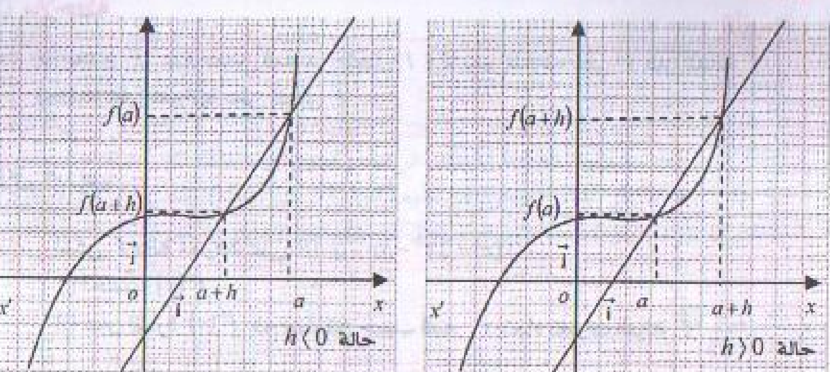
وإذا كان f' سالبة تماما على I فإن الدالة f متناقصة تماما على I

مبرهنة 1

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت f متزايدة تماما على I فإن، $f'>0$ على I
- إذا كانت f متناقصة تماما على I فإن، $f'<0$ على I
- إذا كانت f ثابتة على I فإن، $f'=0$ على I

الإثبات



نفرض أن f متزايدة تماما على I ، a و $a+h$ عنصران من I ولتكن ، $t(h)$ نسبة تزايد الدالة f بين a و $a+h$.

$t(h)=\frac{f(a+h)-f(h)}{h}$ مع $h\neq 0$ لندرس إشارة $t(h)$ على I .

- إذا كان $h>0$ فإن $a<a+h$ و $f(a)<f(a+h)$ لأن f متزايدة تماما على I وبالتالي ، $f(a+h)-f(a)>0$
- إذا كان: $h<0$ فإن $a>a+h$ و $f(a+h)<f(a)$ لأن f متزايدة تماما على I وبالتالي ، $f(a+h)-f(a)<0$

إذن في كلتا الحالتين $f(a+h)-f(a)$ و h لهما نفس الإشارة منه ، $t(h)>0$

وبما ان f قابلة للاشتقاق عند a فإن ، $\lim_{h\to 0} t(h)=f'(a)$

نتقبل " إذا كانت دالة موجبة تماما على مجال فإن نهايتها موجبة "

بما ان $t(h)>0$ فإن نهايتها موجبة وبالتالي $f'(a)>0$ من اجل كل a من I ،

بنفس الطريقة نبين انه إذا كانت f متناقصة تماما على I فإنه من اجل كل a من I يكون $f'(a)<0$.

مبرهنة 2

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة

1) إذا كانت f' موجبة تماما على I فإن الدالة f متزايدة تماما على I
2) إذا كانت f' سالبة تماما على I فإن الدالة f متناقصة تماما على I
3) إذا كانت f' معدومة على I فإن الدالة f ثابتة على I

ملاحظة

إذا انعدم f' عند بعض قيم من المجال I و لا يغير إشارته على I فإن الدالة f تحافظ على تغيراتها على المجال I

تمرين تدريبي

لتكن f دالة معرفة على IR بـ: $f(x)=2x^2-3x$

1) أحسب $f'(x)$

2) عين إشارة $f'(x)$ ثم استنتج حسب قيم x اتجاه تغيرات الدالة f

الحل:

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x من IR لدينا: $f'(x)=4x-3$

2) $f'(x)=0$ تكافئ: $4x-3=0$ تكافئ: $x=\frac{3}{4}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	
تغير الدالة f		الدالة f متزايدة تماما		الدالة f متناقصة تماما	

2 . القيم الحدية لدالة

تعريف

I مجال من IR

f لها قيمة حدية عظمى على المجال I عند العدد C يعني انه من اجل كل x من I: $f(x)\le f(c)$.

- الدالة f لها قيمة حدية صغرى على المجال I عند العدد d يعني انه من اجل كل x من I: $f(x)\ge f(d)$.

x		d	
$f'(x)$	-	0	+
تغير الدالة f	↘	$f(d)$	↗

الدالة f لها قيمة حدية صغرى عند d

x		c	
$f'(x)$		0	
تغير الدالة f	↗	$f(c)$	↘

الدالة f لها قيمة حدية عظمى عند c

ملاحظة

1) إذا كانت الدالة f رتيبة على المجال $I=[a,b]$ فإن قيمهما الحدية تبلغ في أطراف I

2) كل عدد حقيقي أكبر أو يساوي من القيمة الحدية العظمى للدالة f يسمى حاد من الأعلى للدالة f و عند ئذا القيمة الحدية العظمى هي أصغر الحواد العليا للدالة f

3) كل عدد حقيقي أصغر أو يساوي من القيمة الحدية الصغرى للدالة يسمى حاد من الأسفل (الأدنى) للدالة f و عند ئذا القيمة الصغرى هي أكبر الحواد الدنيا للدالة f

تمرين تدريبي 1

ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $[-2,3]$ بالشكل: $f(x)=x^3-3x^2+2$

2) شكل الجدول تغيرات f على المجال $[-2,3]$ واستنتج القيم الحدية للدالة على هذا المجال ثم أعط حصرا لـ: $f(x)$ على المجال السابق

الحل:

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على IR لأنها دالة كثير حدود وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق على المجال $[-2,2]$ ولدينا من اجل كل x من $[-2,2]$: $f'(x)=3x^2-6x$.

$f'(x)=0$ يكافئ $(x=0)$ أو $(x=2)$

وإشارة $f'(x)$ مدونة في الجدول التالي:

x	-2		0		2		3
إشارة $f'(x)$		+	0	-	0	+	

- إذا كان $x\in]0,2[$ فإن: $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $[0,2]$
- إذا كان: $x\in]-2,0[$ أو: $x\in]2,3[$ فإن: $f'(x)>0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجالين: $[-2,0]$ و $[2,3]$

x	-2		0		2		3
إشارة $f'(x)$		+	0	-	0	+	0
تغير الدالة f	$f(-2)$	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(3)$

★ $f(3)=2$ ، $f(2)=-2$ ، $f(0)=2$ ، $f(-2)=18$

$f(0)=2$ هي قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال $[-2, 2]$

$f(3)=2$ هي قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال $[0, 3]$

$f(-2)=-18$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[-2, 2]$

$f(+2)=-2$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[0, 3]$

$f(-2)=-18$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[-2, 3]$

العدد 2 هو قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال $[-2, 3]$ و نتحصل عليها من اجل $x=0$ و $x=3$

ومنه فإن من اجل كل x من $[-2, 3]$ فإن: $2 \geq f(x) \geq -18$

تمرين تدريبي 2

CAB مثلث كيفي ولتكن M نقطة من $[BC]$، نرسم من النقطة M متوازي اظلاع $MQAP$ حيث، P تنتمي إلى $[AB]$ و Q تنتمي إلى $[AC]$

كيف نختار النقطة M بحيث مساحة هذا المتوازي الأضلاع تكون اعظمية.

★ لتكن T و H المسقطين العموديين للنقطتين Q و C على القطعة $[AB]$ على الترتيب.

نضع: $AP=t$ و $QT=x$ و $CH=h$ و $AB=c$

1) أكتب مساحة متوازي الأضلاع $MQAP$ بدلالة x و t

2) اكتب هذه المساحة بدلالة متغير واحد فقط (t او x) وهذا بإيجاد علاقة بين x و t ثم استنتج قيمة عظمى لمساحة متوازي الأضلاع $MQAP$

الحل:

1) مساحة متوازي الأضلاع $MQAP$ هي جداء القاعدة و الارتفاع المتعلق بها اي: $S=QT \times AP = xt$

2) إيجاد علاقة بين x و t

(QE) يوازي (AH)، (AC) و (CH) قاطعين لهما حسب نظرية طاليس نجد:

$\frac{CQ}{CA}=\frac{CE}{CH}$ اي، $\frac{CQ}{CA}=\frac{CH-x}{CH}$ ....(1)

(QM) يوازي (AB)، (CB) و (CA) قاطعين لهما حسب نظرية طاليس نجد:

$\frac{QM}{AB}=\frac{CQ}{CA}$......(2) وبنفس الطريقة نجد، $\frac{AP}{AB}=\frac{CQ}{CA}$......(3)

من (1) و (3) نجد، $\frac{AP}{AB}=\frac{CH-x}{CH}$ اي، $\frac{t}{c}=\frac{h-x}{h}$ ومنه، $t=\frac{c(h-x)}{h}$

إذن، $S=\frac{xc(h-x)}{h}=\frac{c}{h}(hx-x^2)$

★ استنتاج قيمة عظمى لمساحة متوازي الأضلاع $MQAP$

لتكن f الدالة التي ترفق بكل x العدد S منه نكتب: $f(x)=S=\frac{c}{h}(hx-x^2)$

مجموعة تعريف الدالة f هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة x بحيث:

$hx-x^2 \geq 0$ وعليه فإن $x\in[0, h]$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, h]$ لأنها دالة كثير الحدود ولدينا من اجل كل x من $[0, h]$، $f'(x)=\frac{c}{h}(h-2x)$

$f'(x)=0$ يكافئ، $x=\frac{h}{2}$

- إذا كان: $x > \frac{h}{2}$ فإن $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{h}{2}, h\right]$
- إذا كان: $x < \frac{h}{2}$ فإن، $f(x) > 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left[0, \frac{h}{2}\right]$

جدول تغيرات f على $[0, h]$

x	0		$\frac{h}{2}$		h
إشارة $f'(x)$		+	0	-	
تغيرات f		↗	$f\left(\frac{h}{2}\right)$	↘	

القيمة $f\left(\frac{h}{2}\right)$ هي قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال $[0,h]$ وبالتالي فهي القيمة العظمى لمساحة المتوازي الأضلاع $MQAP$

وتساوي: $f\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{c}{h}\left(h\frac{h}{2}-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right)$

$=\frac{c}{h}\left(\frac{h^2}{2}-\frac{h^2}{4}\right)=\frac{c}{h}\,\frac{h^2}{4}=\frac{ch}{4}$

تطبيقات نموذجية

تطبيق . 1 : اتجاه تغير دوال كثير حدود

- حدد اتجاه تغير كل دالة من الدوال التالية :

أ) $f(x)=x^2-3x-4$ ، ب) $g(x)=x^3+x-1$ ، جـ) $h(x)=x^4-2x^2$

الحل :

أ) الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على IR لأنها دالة كثير الحدود ولدينا من اجل كل x من IR : $f'(x)=2x-3$.

$f'(x)=0$ تكافئ $x=\frac{3}{2}$

- إذا كان $x \rangle \frac{3}{2}$ فإن $f'(x)\rangle 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$

- إذا كان $x \langle \frac{3}{2}$ فإن $f'(x)\langle 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$

□ جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	0	+	
تغير f		↘	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	↗	

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}-4=\frac{9-18-16}{4}=\frac{-25}{4}$$

ب) الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على IR لأنها دالة كثير حدود

و لدينا من أجل كل x من IR ، $g'(x)=3x^2+1$

لدينا من أجل كل x من IR $3x^2+1\rangle 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على IR

□ جدول تغيرات g

x	$-\infty$		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		+	
تغيرات g		↗	

جـ) الدالة h معرفة وقابلة للاشتقاق على IR و لدينا من أجل كل x من IR

$$h'(x)=4x^3-4x$$

$h'(x)=0$ تكافئ : $4x(x^2-1)=0$ تكافئ : $(x=0)$ أو $(x=1)$ أو $(x=-1)$

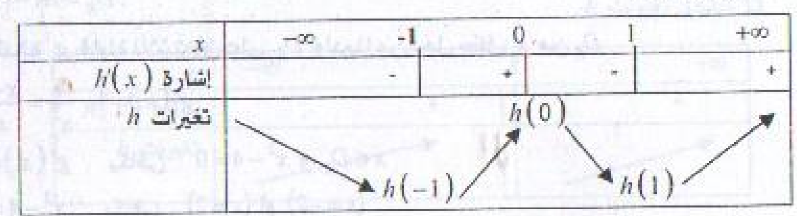
إشارة $4x(x^2-1)$ مدونة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$4x$		-		-	0	+		+	
x^2-1		+	0	-		-	0	+	
$4x(x^2-1)$		-	0	+	0	-	0	+	

- إذا كان x ينتمي إلى $]-\infty,-1]\cup[0,1]$ فإن : $h'(x)\le 0$ ومنه الدالة h متناقصة تماما على كل من المجالين $[0,1]$ و $]-\infty,-1]$.

- إذا كان x ينتمي إلى $[-1,0]\cup[1,+\infty[$ فإن : $h'(x)\ge 0$ ومنه الدالة h متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1,0]$ و $[1,+\infty[$.

□ جدول تغير h



x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
إشارة $h'(x)$		-		+		-		+	
تغيرات h		↘	$h(-1)$	↗	$h(0)$	↘	$h(1)$	↗	

$h(-1)=-1$ ، $h(1)=-1$ ، $h(0)=0$

تطبيق . 2 : اتجاه تغير دوال ناطقة

أوجد مجموعة التعريف كل من الدوال التالية ثم أدرس إتجاه تغيراتها .

1) $f(x)=\frac{2x-3}{2x+4}$ 2) $g(x)=x-3+\frac{4}{x}$

3) $h(x)=\frac{x^2-2x}{x-1}$ 4) $k(x)=2x^2+\frac{2}{x^2-1}$

✓الحل :

1) الدالة f معرفة إذا وفقط إذا : $2x+4 \neq 0$

$2x+4 \neq 0$ يكافئ $x \neq -2$ ومنه مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f = IR-\{-2\}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا من أجل كل x من D_f :

$$f'(x)=\frac{2(2x+4)-2(2x-3)}{(2x+4)^2}=\frac{14}{(2x+4)^2}$$

من أجل كل x من D_f : $\frac{14}{(2x+4)^2} > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين : $]-\infty,-2[$ و $]-2,+\infty[$.

□ جدول تغيرات f ،

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	‖	+
تغيرات f	↗	‖	↗

2) الدالة g معرفة إذا وفقط إذا كان : $x \neq 0$ ومنه مجموعة تعريف الدالة g هي : $D_g = IR-\{0\}$.

-الدالة g قابلة للاشتقاق على D_g ولدينا من أجل كل x من D_g

$$g'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x-4}{x^2}$$

$g'(x)=0$ يكافئ $x^2-4=0$ و $x \in D_g$

$x^2-4=0$ يكافئ $(x=2)$ أو $(x=-2)$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة x^2-4

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	-	0	+	

- إذا كان $x \in [-2,2]$ فإن : $x^2-4 \leq 0$ ومنه : $g'(x) \leq 0$

بالتالي الدالة g متناقصة تماما على $[-2,2]$

- إذا كان $x \in]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$ فإن : $x^2-4 \geq 0$ ومنه $g'(x) \geq 0$

إذن الدالة g متزايدة تماما على كل من المجالين $]2,+\infty[$ و $]-\infty,-2[$

□ جدول تغير g ، $g(2)=1$ ، $g(-2)=-7$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
تغيرات g		↗	$g(-2)$	↘	‖	↘	$g(2)$	↗	

3) الدالة h معرفة إذا وفقط إذا كان : $x-1 \neq 0$

$x-1 \neq 0$ يكافئ : $x \neq 1$ ومنه مجموعة تعريف الدالة h هي : $D_h = IR-\{1\}$

الدالة h قابلة للاشتقاق على D_h لأنها دالة ناطقة ومن أجل كل x من D_h لدينا:

$h'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x)}{(x-1)^2}$ بالتبسيط نجد ، $h'(x)=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$

إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة x^2-2x+2 ؛ لأن $(x-1)^2 > 0$

$h'(x)=0$ يكافئ : $x^2-2x+2=0$

$\Delta=(-2)^2-4(1)(2)=4-8=-4$

$\Delta < 0$ ومنه من أجل كل x من IR : $x^2-2x+2 > 0$

إذن : من أجل كل x من D_h : $h'(x) > 0$

بالتالي: الدالة h متزايدة تماما على المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,1[$

□ جدول تغيرات h

x	$-\infty$	1	$+\infty$
إشارة $h'(x)$	+	‖	+
تغيرات h	↗	‖	↗

4) الدالة k معرفة إذا وفقط إذا كان : $x^2-1 \neq 0$

$x^2-1 \neq 0$ يكافئ : $(x \neq 1)$ أو $(x \neq -1)$

ومنه مجموعة تعريف الدالة k هي: $D_k = IR-\{1,-1\}$

الدالة k قابلة للاشتقاق على D_k لأنها دالة ناطقة ولدينا من اجل كل x من D_k ،

$$k'(x)=4x+\frac{-4x}{(x^2-1)^2}=4x\left[1-\frac{1}{(x^2-1)^2}\right]$$

$k'(x)=0$ يكافئ $(x=0)$ أو $\left(\frac{1}{(x^2-1)^2}=1\right)$

$\frac{1}{(x^2-1)^2}=1$ يكافئ $(x^2-1)^2=1$

$(x^2-1)^2=1$ يكافئ $(x^2-1=1)$ أو $(x^2-1=-1)$

$x^2-1=1$ يكافئ ؛ $x^2=2$ ومنه ؛ $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$

$x^2-1=-1$ يكافئ $x^2=0$ ومنه ؛ $x=0$

إذن : $k'(x)=0$ يكافئ ؛ $(x=0)$ أو $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$

$$k'(x)=4x\left[\frac{(x^2-1)^2-1}{(x^2-1)^2}\right]=\frac{4x(x^2-2)(x^2)}{(x^2-1)^2}$$

إشارة $k'(x)$ هي نفس إشارة $x(x^2-2)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		+	0	-		-	0	+	
x		-		-	0	+		+	
$x(x^2-2)$		-	0	+	0	-	0	+	

- إذا كان : $x\in]-\infty,-\sqrt{2}]\cup[0,\sqrt{2}]$ فإن ؛ $k'(x)\leq 0$ بالتالي الدالة k متناقصة تماما على كل من المجال ؛ $[0,\sqrt{2}]$ و $]-\infty,-\sqrt{2}]$
- إذا كانت: $x\in[-\sqrt{2},0]\cup[\sqrt{2},+\infty[$ فإن ؛ $k'(x)\geq 0$ بالتالي الدالة k متزايدة تماما على كل من المجالين ؛ $[-\sqrt{2},0]$ و $[\sqrt{2},+\infty[$

تطبيق . 3 : اتجاه تغير دوال صماء

لتكن f دالة معرفة على المجال $]-\infty,3]$ بالشكل ؛ $f(x)=\sqrt{3-x}$

1) أدرس تغيرات الدالة f دون استعمال المشتق
2) أوجد مشتق الدالة f ثم عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty,3[$

الحل :

1) ليكن : x_1 , x_2 عددين حقيقيين من $]-\infty,3]$ بحيث ؛ $x_1<x_2<3$ ؛

لتعيين اتجاه تغير f نقارن بين ؛ $f(x_1)$ و $f(x_2)$

بضرب طرفي المتباينة $x_1<x_2$ في العدد (-1) نجد ؛ $-x_1>-x_2$

وبإضافة إلى هذه الأخيرة العدد 3 نجد ؛ $3-x_1>3-x_2>0$

بما ان ؛ $3-x_1>3-x_2$ و $3-x_1\geq 0$ و $3-x_2>0$ والدالة الجذر التربيعي متزايدة على $[0,+\infty[$ فإنه ينتج ؛ $\sqrt{3-x_1}>\sqrt{3-x_2}$ اي ؛ $f(x_1)>f(x_2)$

مما يدل على ان الدالة f متناقصة تماما على المجال ؛ $]-\infty,3]$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty,3[$ ولدينا ؛

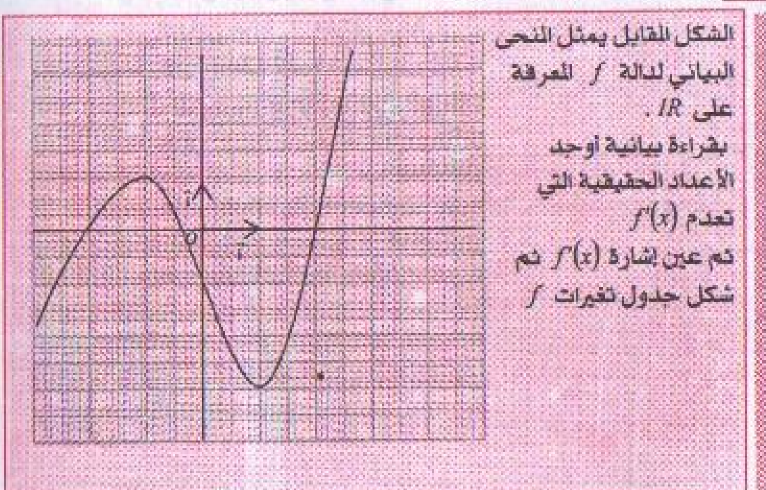
من اجل كل x من $]-\infty,3[$ ؛ $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$

من اجل كل x من $]-\infty,3[$ ؛ $\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,3]$ وجدول تغيراتها هو ؛

x	$-\infty$	$+3$
إشارة $f'(x)$	-	
تغيرات f	↘	0

تطبيق . 4 : تعيين جدول تغيرات دالة علم منحناها

الشكل المقابل يمثل المنحى البياني لدالة f المعرفة على IR.
بقراءة بيانية أوجد الأعداد الحقيقية التي تعدم $f'(x)$ ثم عين إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f



الحل :

النقطة $A(-1,1)$ ذروة للمنحني وبالتالي ميل المماس للمنحني عند هذه النقطة معدوم أي ؛ $f'(-1)=0$

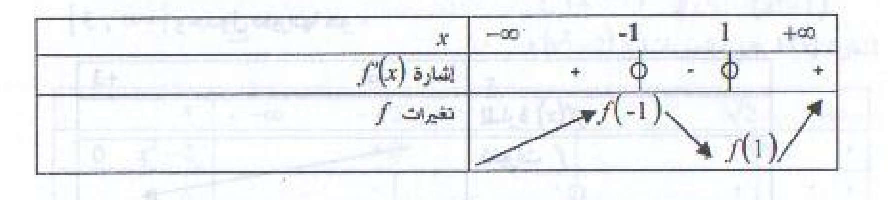
النقطة $B(1,-3)$ حضيض للمنحى وبالتالي المماس للمنحى عند هذه النقطة معدوم اي $f'(1)=0$

□ الدالة f متزايدة على كل من المجالين $]-\infty,-1]$ و $[1,+\infty[$ وبالتالي من اجل كل x من $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ ؛ $f'(x)>0$

□ الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-1,1]$ وبالتالي من اجل كل x من $[-1,1]$ ؛ $f'(x)<0$

جدول تغيرات f

$f(-1)=1$ ، $f(1)=-3$



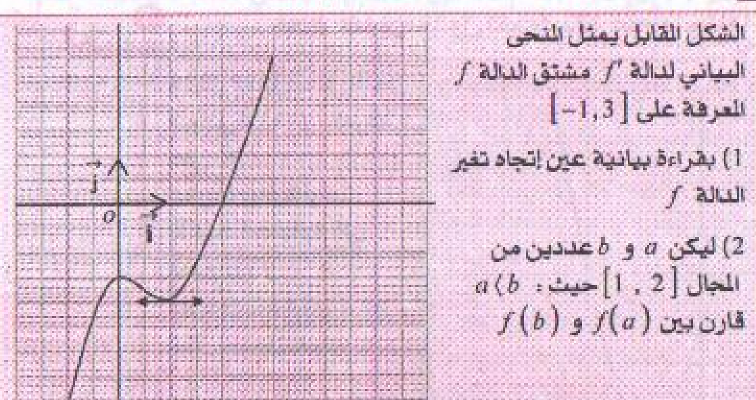
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	0	+	
تغيرات f	↗		$f(-1)$	↘	$f(1)$	↗	

تطبيق 5: تعيين اتجاه تغير دالة علم منحنى دالتها المشتقة

الشكل القابل يمثل المنحى البياني لدالة f' مشتق الدالة f المعرفة على $[-1,3]$

1) بقراءة بيانية عين إتجاه تغير الدالة f

2) ليكن a و b عددين من المجال $[1,2]$ حيث: $a<b$ قارن بين $f(a)$ و $f(b)$



✓ الحل :

1) النقطة $A\left(0,\frac{-3}{2}\right)$ ذروة لـ (γ) منه معامل توجيه المماس لـ (γ) عند A يساوي الصفر اي: $f''(1)=0$

- النقطة $B(1,-2)$ حضيض للمنحني (γ) منه معامل توجيه المماس لـ (γ) عند B

يساوي الصفر اي: $f''(1)=0$

- على المجال $[-1,2]$ بيان الدالة f' يقع تحت محور الفواصل ومنه من اجل كل $x\in[-1,2]$ ؛ $f'(x)<0$ مما يدل على ان f متناقصة تماما على المجال $[-1,2]$

- على المجال $[2,3]$ بيان الدالة f' يقع فوق محور الفواصل ومنه من اجل كل x من $[2,3]$ ؛ $f'(x)>0$ مما يدل على ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[2,3]$

لاحظ أن $f'(2)=0$.

□ جدول تغيرات f

x	-1		2		3
إشارة $f'(x)$		-	0	+	
تغيرات f	$f(-1)$	↘	$f(2)$	↗	$f(3)$

2) من اجل كل x من $[1,2]$ ؛ $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $[1,2]$

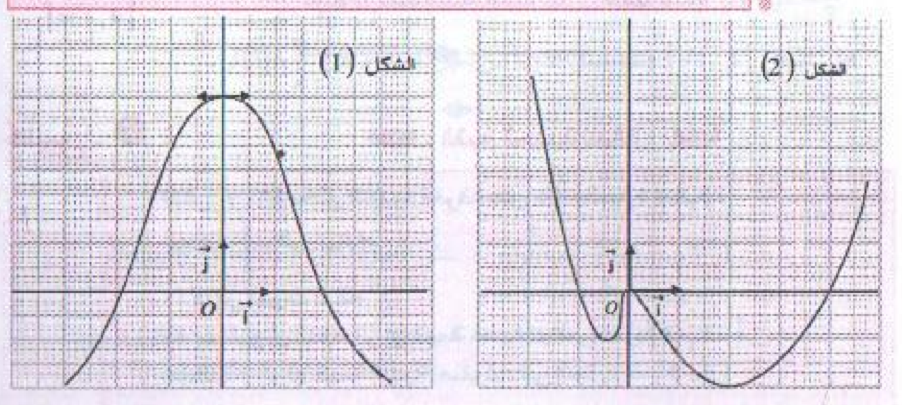
إذن إذا كان: a و b من $[1,2]$ و $a<b$ فإن: $f(a)>f(b)$

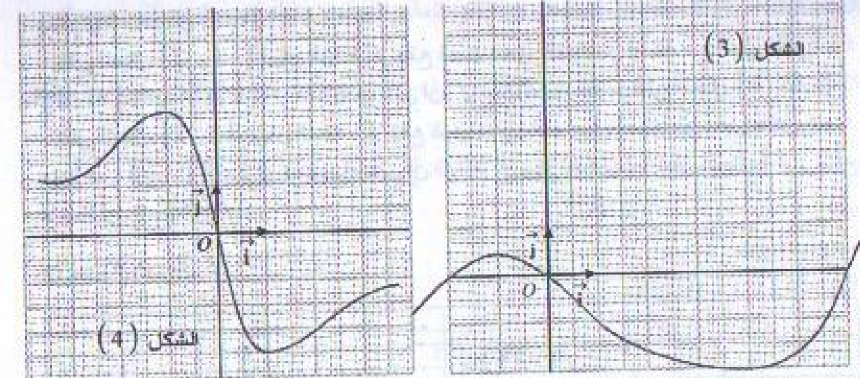
تطبيق 6: التعرف على منحنى دالة ومنحنى دالتها المشتقة

إليك المنحنيات البيانية للدوال f و g المعرفتين على IR ودالتيهما المشتقين f' و g'

المنحى الشكل (1) يمثل بيان الدالة f

- عين المنحى الدالة f' ثم g و g'





✓ الحل :

1) المنحنى الممثل للدالة f' هو منحنى الشكل (4) لأنه

- إذا كان : $x \in]-\infty , 0]$ يكون : $f'(x) > 0$ أي ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty , 0]$
- إذا كان : $x \in [0 , +\infty[$ فإن : $f'(x) < 0$ أي ان الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0 , +\infty[$

2) الشكل (3) يمثل بيان الدالة g والشكل (2) يمثل بيان الدالة g' في المنحني الشكل (2)

- إذا كان x تنتمي الى $]-\infty , -1]$ فإن $g'(x) > 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty , -1]$
- إذا كان : $x \in [-1 , 4]$ فإن : $g'(x) < 0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على $[-1 , 4]$
- إذا كان : $x \in [4 , +\infty[$ فإن : $g'(x) > 0$ بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $[4 , +\infty[$

تطبيق . 7 : القيم الحدية للدالة

لتكن f دالة كثير الحدود معرفة على IR بالعبارة التالية :

$$f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x$$

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) إستنتج ان الدالة f لها قيمة حدية عظمى على $[-1 , 3]$.
هل الدالة f لها قيمة حدية صغرى على المجال $[-1 , 3]$

✓ الحل :

1) ◻ دراسة تغيرات f

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من أجل كل x من IR ،

$$f'(x) = -3x^2 + 3x + 6$$

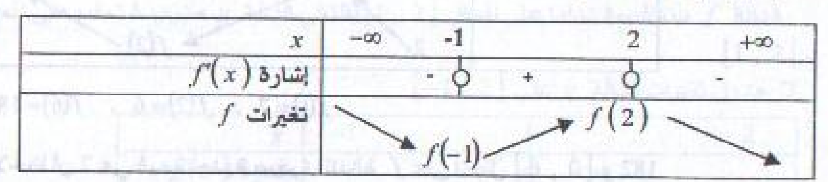
مميز $f'(x)$ هو : $\Delta = 9 - 4(-3)(6)$ منه ، $\Delta = 81$

$$x_1 = \frac{-3+9}{-6} = -1 \quad , \quad x_2 = \frac{-3-9}{-6} = +2$$

منه ، $f'(x)$ ينعدم من أجل $x = -1$ و $x = 2$

- إذا كان : $x \in [-1 , 2]$ فإن : $f'(x) \geq 0$
بالتالي f متزايدة تماما على المجال $[-1 , 2]$
- إذا كان $x \in]-\infty , -1] \cup [2 , +\infty[$ فإن : $f'(x) \leq 0$
ومنه الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين : $]-\infty , -1]$ و $[2 , +\infty[$

◻ جدول تغيرات الدالة f



x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	0	+	0	-	
تغيرات f	↘		$f(-1)$	↗	$f(2)$	↘	

$$f(-1) = -\frac{7}{2} \quad , \quad f(2) = 10$$

2) العدد $f(2)$ هي قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال $[-1 , 3]$

ومنه الدالة f لها قيمة حدية صغرى هي : $f(-1) = -\frac{7}{2}$ $\frac{-7}{2}$

على المجال $[-1 , 3]$ ونتحصل عليها من اجل $x = -1$ لأن $f(3) = \frac{9}{2}$.

تطبيق . 8 : حصر دالة بعددين حقيقيين

1) ادرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0 , 6]$ المعرفة بالعبارة :

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$$

2) اوجد عددان حقيقيان ثابتان m و m' بحيث من أجل كل x من $[0 , 6]$ ، $m \leq f(x) \leq m'$ والمجال $[m , m']$ اصغر ما يمكن

✓ الحل :

1) □ إتجاه تغير الدالة f

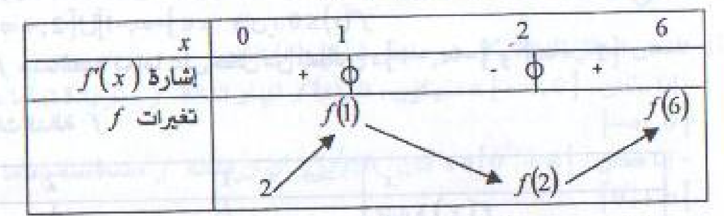
الدالة f معرفة على $[0 , 6]$ وقابلة للاشتقاق على $[0 , 6]$ لأنها دالة كثير الحدود

ولدينا من أجل كل x من $[0 , 6]$ ؛ $f'(x)=6x^2-18x+12$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=1$ ؛ أو $x=2$

- إذا كان ؛ $x\in[1 , 2]$ فإن ؛ $f'(x)\leq 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $[1 , 2]$
- إذا كان ؛ $x\in[0 , 1]\cup[2 , 6]$ فإن ؛ $f'(x)\rangle 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $[0 , 1]$ ، $[2 , 6]$

□ جدول تغيرات f على المجال $[0 , 6]$



x	0		1		2		6
إشارة $f'(x)$		+	0	-	0	+	
تغيرات f	2	↗	$f(1)$	↘	$f(2)$	↗	$f(6)$

$f(1)=7$ ، $f(2)=6$ ، $f(6)=182$

2) نلاحظ أن 2 هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[0 , 6]$ و 182 هي قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال $[0 , 6]$ ومنه من أجل كل x من $[0 , 6]$ ؛ $182\geq f(x)\geq 2$

إذن ؛ $m=2$ و $m'=182$.

تطبيق . 9 :

قيمة حدية لمقلوب دالة

1) أدرس تغيرات f المعرفة على IR بالعبارة ؛ $f(x)=-2x^2+4x+8$
2) استنتج قيمة حدية صغرى للدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\frac{1}{-2x^2+4x+8}$ على المجال $[-1,2]$

✓ الحل :

1) الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على IR ولدينا من أجل كل x من IR ؛

$f'(x)=-4x+4$

$f'(x)=0$ يكافئ ؛ $x=1$

- إذا كان ؛ $x\geq 1$ فإن ؛ $f'(x)\leq 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $[1,+\infty[$
- إذا كان $x\leq 1$ فإن؛ $f'(x)\geq 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty,1]$

□ جدول تغيرات f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	
تغيرات f		↗	$f(1)$	↘	

$f(2)=8$ ، $f(-1)=2$ ، $f(1)=10$

2) الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1,1]$ و بالتالي ؛ $g=\frac{1}{f}$ متناقصة تماما على $[-1,1]$

- الدالة f متناقصة تماما على المجال $[1 , 2]$ بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1 , 2]$

□ جدول تغيرات الدالة g على $[-1 , 2]$

x	-1		1		2
إشارة $g'(x)$		-	0	+	
تغيرات g	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{1}{10}$	↗	$\frac{1}{8}$

ومنه نستنتج أن ؛ $\frac{1}{10}$ هي قيمة حدية صغرى لـ ؛ g على $[-1,2]$

تطبيق . 10 :

إيجاد القيم الحدية لدوال بالاعتماد على دالة معلومة

لتكن f دالة متزايدة على المجال $[1,3]$ ومتناقصة على المجال $[-2,1]$ بحيث؛ $f(3)=1$ ، $f(1)=0,5$ ، $f(-2)=2$

1) شكل جدول تغيرات الدالة f على $[-2,3]$
2) اوجد القيم الحدية للدالة f على المجال؛ $[-2,3]$
3) إستنتج القيم الحدية لكل من الدوال التالية ؛ $g=-2f$ ، $h=\sqrt{f}$

✓ الحل :

1) تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	-2	1	3
تغيرات f	2 ↘	$0,5$ ↗	1

2) إيجاد القيم الحدية للدالة f على المجال $[-2,3]$

- القيمة الحدية العظمى للدالة f على المجال $[-2,3]$ هي: $f(-2)=2$

القيم الحدية الصغرى للدالة f على المجال هي: $[-2,3]$ هي: $f(1)=0,5$

3) استنتاج القيم الحدية للدالتين g و h

x	-2	1	3
تغيرات g	-4 ↗	-1 ↘	-2

ومنه القيمة الحدية العظمى للدالة g على $[-2,3]$ هي: $g(1)=-1$

القيمة الحدية الصغرى للدالة g على: $[-2,3]$ هي: $g(-2)=-4$

□ $h=\sqrt{f}$

x	-2	1	3
تغيرات h	$\sqrt{2}$ ↘	$\sqrt{0,5}$ ↗	1

القيمة الحدية العظمى للدالة h على $[-2,3]$ هي: $h(-2)=\sqrt{2}$

القيمة الحدية الصغرى للدالة h على $[-2,3]$ هي: $h(1)=\sqrt{0,5}$

تطبيق - 11 : مقارنة بين دالتين مرجعيتين

مقارنة دالتين f و g يعني تعيين مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث: $f(x)\leq g(x)$

لتكن f و g دالتين على المجال $[0,4]$ بالعبارتين: $f(x)=1+\frac{1}{4}x$ و $g(x)=\sqrt{x}$

1) ادرس تغيرات الدالة h المعرفة على $[0,4]$ بالعبارة: $h(x)=g(x)-f(x)$

2) أستنتج مقارنة $f(x)$ و $g(x)$ على المجال $[0,4]$

✓ الحل :

1) $h(x)=\sqrt{x}-1-\frac{1}{4}x$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $[0,4[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,4[$

هما: $x\mapsto\sqrt{x}$ و $x\mapsto -1-\frac{1}{4}x$

ولدينا من اجل x من $]0,4]$: $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{4}$

$$h'(x)=\frac{2-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}=\frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{4\sqrt{x}(2+\sqrt{x})}=\frac{4-x}{4\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})}$$

$h'(x)=0$ يكافئ: $4-x=0$ و $x\in]0,4]$ ومنه: $x=4$

- إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة $4-x$
- إذا كان: $x\in]0,4]$ فإن إشارة $4-x$ موجبة وبالتالي $h'(x)\rangle 0$

اي أن الدالة h متزايدة تماما على $[0,4]$

□ جدول تغيرات h

x	0	4
إشارة $h'(x)$	+	0
تغيرات h	$h(0)$ ↗	$h(4)$

$h(4)=0$ ، $h(0)=-1$

2) نلاحظ ان قيم $h(x)$ سالبة في المجال $[0,4]$ اي من اجل كل x من $[0,4]$ ، $h(x)\leq 0$

$h(x)\leq 0$ يكافئ: $g(x)-f(x)\leq 0$

تكافئ $g(x)\leq f(x)$

إذن من اجل كل x من $[0,4]$ ، $g(x)\leq f(x)$.

تطبيق - 12 : مقارنة بين دالتين كثير حدود

لتكن الدالتين f و g المعرفتين على IR بالعبارتين:

$f(x)=x^4-3x+1$ ، $g(x)=2x^3-3x+1$

ولتكن h دالة معرفة على IR بـ: $h(x)=f(x)-g(x)$

1) ادرس تغيرات الدالة h ثم استنتج إشارة h

2) قارن بين الدالتين f و g.

✓الحل :

1) $h(x)=f(x)-g(x)$

$$=(x^4-3x+1)-(2x^3-3x+1)=x^4-2x^3-3x+3x+0=x^4-2x^3$$

الدالة h معرفة وقابلة للاشتقاق على IR لأنها دالة كثير حدود ولدينا من اجل كل x من IR ، $h'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$

$h'(x)=0$ يكافئ ، $(x=0)$ أو ، $\left(x=\frac{3}{2}\right)$

إشارة $h'(x)$ مدونة في الجدول التالي ،

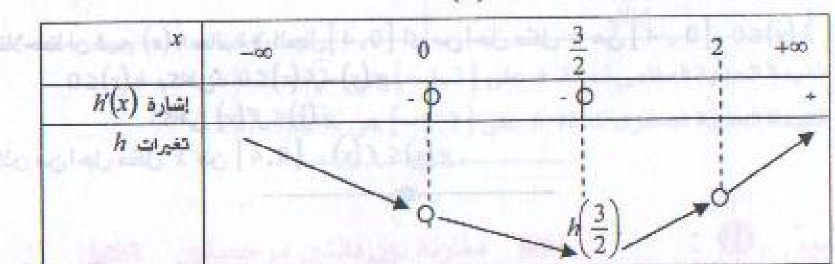
x	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
إشارة $h'(x)$	-	0 -	0 +	

- إذا كان ، $x\in\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$ فإن ، $h'(x)\geq 0$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماما على $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$

وإذا كان ، $x\in\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$ فإن ، $h'(x)\leq 0$ و بالتالي الدالة h متناقصة تماما على $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$

□ جدول تغيرات الدالة h ،

$h(0)=0$ ، $h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{81}{16}-2\times\frac{27}{8}=-\frac{27}{16}$



x	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
إشارة $h'(x)$	-	0 -	0 +		+
تغيرات h	↘	0 ↘	$h\left(\frac{3}{2}\right)$ ↗	0 ↗	

$h(x)=0$ تكافئ $x^4-2x^3=0$

يكافئ $x^3(x-2)$

يكافئ $(x=0)$ أو $(x=2)$

- إذا كان ، $x\in[0,2]$ فإن ، $h(x)\leq 0$
- إذا كان ، $x\in]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$ فإن ، $h(x)\geq 0$

2) إذا كان ، $x\in[0,2]$ فإن ، $h(x)\leq 0$ ، أي $f(x)-g(x)\leq 0$ مما يدل على ان $f(x)\leq g(x)$

- إذا كان ، $x\in]-\infty,0]\cup[2+\infty[$ فإن ، $h(x)\geq 0$ مما يدل على ان ، $f(x)-g(x)\geq 0$ اي ، $f(x)\geq g(x)$

تطبيق . 13 : حصر الدالتين sin و cos

لتكن f دالة معرفة على المجال $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بالعبارة ، $f(x)=x-\sin x$

1) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

ثم استنتج إشارة f على I و قارن بين $\sin x$ و x

2) لتكن g دالة معرفة على I بالعبارة التالية ، $g(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$

أ) ادرس تغيرات الدالة g على I

ب) إستنتج انه من اجل كل x من I ، $1-\frac{x^2}{2}\leq\cos x\leq 1$

✓الحل :

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على I لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على I هما ، $x\mapsto x$ و $x\mapsto -\sin x$ و لدينا من اجل كل x من I ، $f'(x)=1-\cos x$

$f'(x)=0$ يكافئ $\cos x=1$ و $x\in I$ ؛

($\cos x=1$ و $x\in I$) يكافئ $x=0$

الدالة $x\mapsto\cos x$ متناقصة تماما على المجال ومنه إذا كان $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ فإن ،

$0\leq\cos x\leq 1$ و بضرب حدود هذه المتباينة في (-1) نجد ، $0\geq-\cos x\geq-1$ وبإضافة 1 الى حدود المتباينة الأخيرة نجد ، $1\geq 1-\cos x\geq 0$ اي ان ، $f'(x)\geq 0$

بالتالي ، الدالة f متزايدة تماما على I

□ جدول تغيرات f على I

x	0	$\frac{\pi}{2}$
إشارة $f'(x)$	0	+
تغيرات f	0 ↗	$\frac{\pi}{2}-1$

نستنتج من جدول تغيرات f انه من اجل كل x من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ، $f(x)\geq 0$

ومنه من اجل كل x من I ، $x-\sin x\geq 0$ اي ، $x\geq\sin x$

2) أ) $g(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على I لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على I

هما : $x\mapsto -1+\frac{x^2}{x}$ و $x\mapsto \cos x$

ولدينا من اجل x من I : $g'(x)=-\sin x+x=f(x)$

لدينا من اجل كل x من I ، $f(x)\geq 0$ ومنه من اجل كل x من I ، $g'(x)\geq 0$ مما يدل على ان لدالة g متزايدة تماما على I

□ جدول تغيرات g

x	0 $\frac{\pi}{2}$
إشارة $g'(x)$	+
تغيرات g	$g(0)$ ↗ $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{\pi^2}{8}$ ، $g(0)=0$

ب) من جدول التغيرات g نستنتج ان من اجل كل x من I ، $g(x)\geq 0$

$g(x)\geq 0$ يكافئ : $\cos x-1+\frac{x^2}{2}\geq 0$ تكافئ : ....(1) $\cos x\geq 1-\frac{x^2}{2}$

ولدينا : $\cos x\leq 1$.....(2) من اجل كل x من IR من (1) و (2) نجد : $1-\frac{x^2}{2}\leq \cos x\leq 1$.

تطبيق 14 : الوضع النسبي للمنحني بالنسبة إلى المماس

لتكن الدالة f المعرفة على IR بالعبارة التالية : $f(x)=(x+2)^3$

وليكن : (γ) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أوجد معادلة المماس (Δ) لـ : (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$

2) نضع : $h(x)=f(x)-27x$

أ) أدرس تغيرات الدالة h على IR

ب) تحقق أن $h(-8)=0$ ثم أوجد إشارة $h(x)$ على IR

3) أدرس وضعية المنحنى (γ) بالنسبة إلى المماس (Δ)

✓ الحل :

1) معادلة المماس (Δ) لـ : (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$ هي :

$(\Delta): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا : من اجل كل x من IR ، $f'(x)=3(x+2)^2$

ومنه : $f'(1)=27$ و $f(1)=27$

إذن : $(\Delta): y=27(x-1)+27=27x$

2) أ) دراسة تغيرات h

الدالة h قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x من IR :

$h'(x)=f'(x)-27=3(x+2)^2-27=3\left((x+2)^2-9\right)$

$=3(x+2-3)(x+2+3)=3(x-1)(x+5)$

$h'(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ او $(x=-5)$

x	$-\infty$	-5		1		$+\infty$
إشارة $h'(x)$	+	0	-	0	+	

- إذا كان : $x\in[-5\,,1]$ فإن : $h'(x)\leq 0$ ومنه h دالة متناقصة على $[-5,1]$

- إذا كان : $x\in]-\infty,-5]\cup[1\,,+\infty[$ فإن : $h(x)\geq 0$ ومنه h دالة متزايدة تماما على كل من المجالين : $]-\infty,-5]$ و $[1\,,+\infty[$

□ جدول تغيرات h :

x	$-\infty$	-5		1		$+\infty$
إشارة $h'(x)$	+	0	-	0	+	
تغيرات h	↗	$h(-5)$	↘	0	↗	

$h(-5)=108$ ، $h(1)=f(1)-27=0$

ب) $h(-8)=(-8+2)^3-27(-8)$

$=(-6)^3+216=-216+216=0$

إذا كان : $x\in]-\infty,-8[$ فإن : $h(x)<0$

- إذا كان : $x\in[-8\,,+\infty[$ فإن : $h(x)\geq 0$

3) دراسة وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ)

لدراسة وضعية (γ) بالنسبة الى (Δ) نعين إشارة $f(x)-y$ على IR حيث : $y=27x$ من السؤال 2) نجد أن :

- إذا كان : $x\in]-\infty\,,-8[$ فإن : (Δ) يقع فوق (γ)

- إذا كان: $x\in]-8,+\infty[-\{1\}$ فإن: (Δ) يقع تحت (γ)
- إذا كان: $x=1$ أو $x=-8$ فإن: (Δ) يقطع (γ) في النقطتين: $A(1,f(1))$ و $B(-8,f(-8))$

تطبيق - 15 : اثبات متباينات اعتماد على تغيرات دالة

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بالعبارة:

$f(x)=\frac{x}{1+x}-\frac{a}{1+a}$ حيث: a عدد حقيقي موجب

1) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,+\infty[$ واحسب $f(0)$ ، $f(a)$ ثم إستنتج أن للدالة f قيمة حدية صغرى

2) ليكن c و b عددان حقيقيان موجبان حيث: $a\le b+c$

ا) بين أن: $\frac{a}{1+a}\le\frac{b+c}{1+b+c}$

ب) تحقق أن: $\frac{c}{1+b+c}\le\frac{c}{1+c}$ و $\frac{b}{1+b+c}\le\frac{b}{1+b}$

ج) استنتج أن: $\frac{a}{1+a}\le\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$

الحل :

1) ا) دراسة تغيرات f

الدالة f معرفة على $IR-\{-1\}$ وقابلة للاشتقاق على $IR-\{-1\}$ فهي قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها دالة ناطقة ولدينا من أجل كل x من $]0,+\infty[$:

$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$

- من أجل كل x من $[0,+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

جدول تغيرات f

x	0	a	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	
تغيرات f	$\frac{-a}{1+a}$ ↗	0	↗

$f(0)=\frac{-a}{1+a}$ ، $f(a)=\frac{a}{1+a}-\frac{a}{1+a}=0$

استنتج من جدول تغيرات الدالة f أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0,+\infty[$:

$f(x)\ge\frac{-a}{1+a}$ ومنه العدد: $\frac{-a}{1+a}$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f .

2) ا) لدينا: من أجل كل $x\ge a$ ؛ $f(x)\ge0$

بما أن: $b+c\ge a$ فإن: $f(b+c)\ge0$ ولكن: $f(b+c)=\frac{b+c}{1+b+c}-\frac{a}{1+a}$

$f(b+c)\ge0$ يكافئ: $\frac{b+c}{1+b+c}-\frac{a}{1+a}\ge0$ اي: $\frac{a}{1+a}\le\frac{b+c}{1+b+c}$

ب) * لدينا: $1+b+c\ge1+b$ وبقلب هذه المتباينة نجد: $\frac{1}{1+b+c}\le\frac{1}{1+b}$ وبضرب طرفي المتباينة في b نجد: $\frac{b}{1+b+c}\le\frac{b}{1+b}$.

* $1+b+c\ge1+c$ منه نستنتج: $\frac{1}{1+b+c}\le\frac{1}{1+c}$

بضرب طرفي هذه الأخيرة في c نجد: $\frac{c}{1+b+c}\le\frac{c}{1+c}$

ج) لدينا: $\frac{b}{1+b+c}\le\frac{b}{1+b}$ .....(1) ، $\frac{c}{1+b+c}\le\frac{c}{1+c}$ .....(2)

بجمع (1) و (2) طرف الى طرف نجد: $\frac{b+c}{1+b+c}\le\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$

لكن: $\frac{a}{1+a}\le\frac{b+c}{1+b+c}$ منه ينتج: $\frac{a}{1+a}\le\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$

تطبيق - 16 : إثبات متباينة اعتماد على تغيرات دالة مختارة

a و b عددين حقيقيين موجبين تماما

- بين صحة المتباينة: $\sqrt{a+b}\left(\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\ge1$

الحل :

لإثبات صحة هذه المتباينة نقوم بتثبيت أحد العددين وليكن: a ونجعل b متغيرا وهذا يقودنا إلى دراسة الدالة f المعرفة بالعبارة: $f(x)=\sqrt{a+x}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ على المجال $[0,+\infty[$

- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ هما: $x\mapsto\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{a}}$ و $x\mapsto\sqrt{a+x}$ ولدينا من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ؛

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+a}}\left[\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right]+\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x+a}=\frac{1}{2\sqrt{x+a}}\left[\frac{2\sqrt{a}x+a\sqrt{a}+\sqrt{x}}{2}\right]$$

من اجل كل x من $]0,+\infty[$: $2\sqrt{a}x+a\sqrt{a}+\sqrt{x}>0$

ومنه فإن ، من اجل كل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)>0$

مما يدل على ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

□ جدول تغيرات f

x	0	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	
تغيرات f	$f(0)$ ↗	

$$f(0)=\sqrt{a}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=1$$

نستنتج من جدول التغيرات f انه من اجل كل x من $[0,+\infty[$: $f(x)\ge 1$

وبما ان b عدد حقيقي موجب فإن $f(b)\ge 1$

لكن : $f(b)=\sqrt{a+b}\left(\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ ، منه $\sqrt{a+b}\left(\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\ge 1$.

تطبيق 17 : الدوال والمساحات

ABC مثلث قائم في B ومتساوي الساقين ولتكن E,D نقطتين من $[AB]$ و $[BC]$ على التوالي متساويتين المسافة عن النقطة B ولتكن E',D' مسقطهما العمودي على القطعة $[AC]$ حيث : $AB=3$ و $CE'=x$

ولتكن I المسقط العمودي لـ B على $[AC]$

1) احسب BI

2) احسب EE' و ED'

3) أ) احسب S مساحة المستطيل $DED'E'$ بدلالة x

ب) استنتج القيمة x التي من اجلها تكون مساحة المستطيل $DED'E'$ اعظمية

✓ الحل :

1) □ حساب BI

بما ان المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين (BI) هو منصف للقطعة $[AC]$

فإن : $BI=\frac{1}{2}AC$

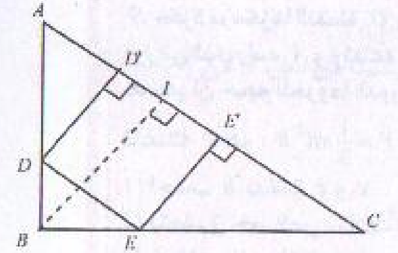
لكن : $AC^2=AB^2+BC^2=9+9=18$ منه $AC=3\sqrt{2}$ إذن : $BI=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

2) □ حساب $E'E$

المستقيمان $(E'E)$ و (IB) متوازيان ، (CB) و (CI) قاطعين لهما حسب نظرية طاليس فإن : $\frac{EE'}{IB}=\frac{E'C}{CI}$

ومنه، $EE'=\frac{IB\times E'C}{CI}$ بالتعويض نجد :

$$E'E=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}\times x}{\frac{3}{2}\sqrt{2}}=x$$



□ حساب ED' :

$ED'=AC-2CE'=3\sqrt{2}-2x$ لأن $AD'=CE'$

3) أ) □ حساب S :

$S=EE'\times ED'$ ، ومنه $S=x(3\sqrt{2}-2x)$

ب) الدالة التي ترفق بكل x من $\left]0,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right[$ العدد S قابلة للاشتقاق على هذا المجال ولدينا

من اجل كل x من $\left]0,3\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$: $S'=-4x+3\sqrt{2}$

$S'=0$ يكافئ $x=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

- إذا كان $x\in\left]0,\frac{3\sqrt{2}}{4}\right[$ فإن ، $S'>0$
- إذا كان $x\in\left]\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right[$ فإن ، $S'<0$

□ جدول تغيرات S

x	0	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
إشارة $S'(x)$	+	0	-
تغيرات S	0 ↗	$\frac{9}{4}$	↘ 0

إذن تكون المساحة S أعظميا إذا كان: $x=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ وهذه المساحة هي: $\frac{9}{4}$

تطبيق 18: الدوال والحجوم

S كرة مركزها النقطة O ونصف قطرها r نريد إحاطة هذه الكرة بمخروط دوراني الذي رأسه A و ارتفاعه h حيث يكون حجمه أصغر ما يكون.
نذكر أن حجم المخروط الدوران الذي رأسه A و ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته R هو: $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$ ، نضع: $OA=x$

1) احسب h بدلالة r و x
2) بتطبيق خصائص المثلثات المتشابهة أوجد عبارة R بدلالة r و x
3) أكتب V بدلالة r و x
4) ادرس الدالة f التي ترفق بكل x العدد الحقيقي الموجب V

ثم استنتج القيمة التي تجعل V أصغر ما يكون ثم أوجد نصف قطر قاعدته وارتفاعه في هذه الحالة

الحل:

1) حساب h بدلالة r و x:

$h=OA+r=x+r$

2) إيجاد عبارة R بدلالة x و r

المثلثان AOB و $AO'C$ متشابهان لأن:

$O\hat{A}B=O'\hat{A}C$ و $A\hat{O'}C=A\hat{B}O$ ومنه ينتج:

$\frac{AB}{O'A}=\frac{OB}{O'C}$ أي: $\frac{AB}{x+r}=\frac{r}{R}$

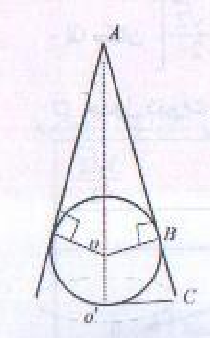
في المثلث AOB القائم في B لدينا: $OB^2+AB^2=OA^2$

ومنه: $AB^2=OA^2-OB^2$ ، $AB^2=x^2-r^2$ ومنه، $AB=\sqrt{x^2-r^2}$

من المساواة: $\frac{AB}{x+r}=\frac{r}{R}$ نجد: $R=\frac{r(x+r)}{AB}$

ومنه: $R^2=\frac{r^2(x+r)^2}{x^2-r^2}=\frac{r^2(x+r)}{x-r}$

إذن: $R^2=\frac{r^2(x+r)}{x-r}$



3) كتابة V بدلالة x و r: $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$

لدينا: $h=x+r$ و $R^2=\frac{r^2(x+r)}{x-r}$ بالتعويض نجد: $V=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2(x+r)}{x-r}(x+r)$

إذن: $V=\frac{1}{3}\pi r^2\frac{(x+r)^2}{x-r}$

4) المتغير x يكون دوما أكبر r أي: $x\in]r,+\infty[$

الدالة V قابلة للاشتقاق على $]r,+\infty[$ ولدينا من أجل x من $]r,+\infty[$

$$V'=\frac{1}{3}\pi r^2\left[\frac{2(x+r)(x-r)-(x+r)^2}{(x-r)^2}\right]$$

$$V'=\frac{1}{3}\pi r^2(x+r)\left[\frac{2(x-r)-(x+r)}{(x-r)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2\frac{x+r}{(x-r)^2}(x-3r)$$

إشارة V' هي نفس إشارة: $x-3r$

إذا كان: $x>3r$ فإن: $V'>0$ ومنه الدالة V متزايدة تماما على $]3r,+\infty[$

إذا كان: $x\in]r,3r[$ فإن: $V'<0$ ومنه الدالة V متناقصة تماما على $]r,3r[$

□ جدول تغيرات V

x	r	$3r$	$+\infty$
إشارة V'	-	0	+
تغيرات V	↘	$V(3r)$	↗

$V(3r)=\frac{1}{3}\pi r^2\frac{16r^2}{2r}$

$V(3r)=\frac{16}{6}r^3\pi=\frac{8}{3}\pi r^3$

إذن القيمة $\frac{8}{3}\pi r^3$ هي أصغر حجم للمخروط الدوراني الذي يحيط بالكرة ذات المركز O ونصف القطر R

من أجل: $x=3r$ نجد: $R=\sqrt{\frac{r^2(4r)}{2r}}$

$h=3r+r=4r$ و $R=\sqrt{2r^2}=r\sqrt{2}$.

تمارين و مسائل

1 أدرس اتجاه تغير كل من الدوال التالية ثم شكل جدول تغيرات كل منها :

1) $f(x)=x^2-2x+3$ 2) $g(x)=2x^3+6x+4$

3) $h(x)=-x^4+x^3+1$ 4) $k(x)=x^5-x^3+5$

2 أدرس اتجاه تغير كل من الدوال التالية ثم شكل جدول تغيرات كل منها :

1) $f(x)=\frac{-x+5}{x+2}$ ، 2) $g(x)=x-1+\frac{3}{2x-1}$

3) $h(x)=\frac{x^2+3x-1}{x^2+x}$ ، 4) $k(x)=x-2+\frac{2}{x-2}$

5) $L(x)=\frac{-x^2+2x}{x+1}$ ، 6) $T(x)=1+x+\frac{1}{x^2}$.



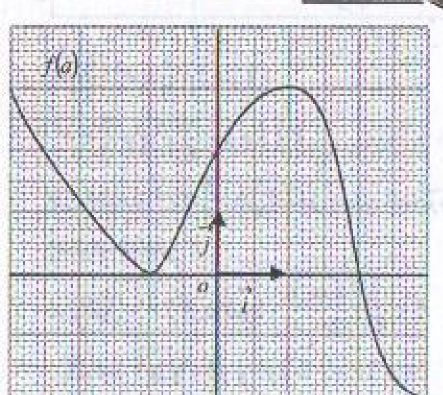
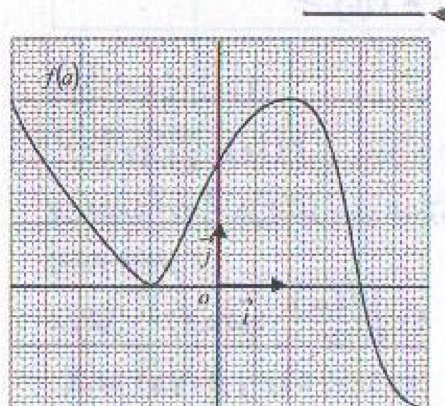
3 لتكن f دالة معرفة على المجموعة $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$

بالشكل التالي : $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

1) عين اتجاه تغير الدالة f بدون استعمال إشارة المشتق

2) عين اتجاه تغير الدالة f باستعمال المشتق

4 الشكل المقابل يمثل المنحنى البياني للدالة f' مشتق الدالة f المعرفة على $[-3,3]$.

1- بقراءة بيانية عين اتجاه تغير الدالة f

2- ليكن a و b عددين من المجال : $[1,3]$

حيث : $a>b$ قارن بين $f(a)$ و $f(b)$

5 إليك المنحنيات البيانية للدالتين f و g المعرفتين على IR ودالتيهما المشتقتين f' و g'

إرفاق بكل منحنى للدالة بمنحنى دالتها المشتقة مبررا اختيارك .

6 لتكن f دالة معرفة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ بالعبارة التالية : $f(x)=\cos x\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)$

1) عين $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على الدوال $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ مستعملا اتجاه تغير مركب دالتين رتيبتين يطلب تعيينها .

7 لتكن الدالة f معرفة على مجموعة تعريفها بالعبارة التالية : $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

1- عين مجموعة تعريف الدالة f

2- أوجد اتجاه تغير الدالة f

3- قارن بين العددين A و B بدون حساب حيث:

$A=\frac{(1,117)^2+1,117+1}{(1,117)^2+1}$ ، $B=\frac{(1,116)^2+1,116+1}{(1,116)^2+1}$

8 m عدد حقيقي و f دالة ناطقة معرفة بالعبارة : $f(x)=\dfrac{x^2+(m+1)x-2}{x-m-1}$

1- عين مجموعة تعريف الدالة f

2- ادرس حسب قيم العدد الحقيقي m اتجاه تغير الدالة f

9 ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $]0,2[$ بالعبارة التالية :

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{x+3}$$

- واستنتج حصرا للدالة f على نفس المجال .

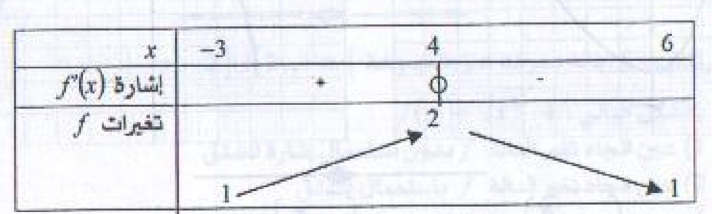
10 انشئ جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بالعبارة التالية :

$$f(x)=-x+\frac{1}{3+x}$$

2- استنتج حصرا للدالة f على المجال $[1\ ,\ 2]$

3- هل الدالة f لها قيمة حدية صغرى على المجال $[-1\ ,\ 1]$

11 لتكن f دالة جدول تغيراتها مدون فيما يلي :



x	-3		4		6
إشارة $f'(x)$		+	0	-	
تغيرات f	1	↗	2	↘	1

1- أوجد القيم الحدية الكبرى للدالة f على المجال $[-3,6]$

2- أوجد القيم الحدية لكل من الدوال التالية :

$g=3f\quad,\quad h=-5f\quad,\quad K=\sqrt{f}$

12 لتكن الدالتين f و g المعرفتين على IR بالعبارتين :

$f(x)=x^3+2x^2+x$ و $g(x)=-x^3+2x^2+x+16$

ولتكن h دالة معرفة على IR بـ: $h(x)=f(x)-g(x)$

1) ادرس تغيرات الدالة h

ب) احسب $h(2)$ ثم حل في IR المعادلة : $h(x)=0$

ج) استنتج إشارة $h(x)$

2) قارن بين الدالتين f و g بالاعتماد على الدالة h .

1) لتكن الدالتين f و g المعرفتين على المجال : $I=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

بالعبارتين التاليتين : $f(x)=x-\sin x$ ، $g(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$

ا) ادرس تغيرات الدالة f ثم عين إشارة $f(x)$ على I

ب) ادرس تغيرات الدالة g على I ثم استنتج ان إشارة $g(x)$

2) لتكن الدالتين h و k المعرفتين كما يلي على I

$h(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$ ، $k(x)=-\cos x+1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$

ا) ادرس تغيرات الدالتين h و k ثم استنتج إشارة كل من : $h(x)$ و $k(x)$

ب) استنتج ان من أجل كل x من $\left[0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x \quad \text{و} \quad 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\le\cos x\le 1-\frac{x^2}{2}$$

ج) أعط حصرا للعددين $\sin 0{,}1$ و $\cos\ 0{,}1$ (النتائج مدورة إلى 10^{-2}) .

12 لتكن الدالة العددية f المعرفة على IR كما يلي :

$f(x)=x^3+2x^2+3$ وليكن (γ) المنحنى البياني

1) أوجد معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة (1)

2) نضع : $h(x)=f(x)-(7x-1)$

ا) ادرس تغيرات الدالة h

ب) تحقق أن $h(-4)=0$ ثم عين إشارة $h(x)$ على IR

ب) ادرس وضعية المنحنى (γ) بالنسبة إلى (Δ)

13 $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين حيث : $AB=BC=CD=1$

ولتكن H المسقط العمودي للنقطة B على $[AD]$

نضع : $A\hat{B}H=x$ حيث : x يقاس بالراديان

1) احسب BH و AH بدلالة x

2) احسب الطول AD

3) احسب المساحة S للشبه المنحرف $ABCD$ بدلالة x

4) لتكن الدالة f المعرفة بـ: $x\xrightarrow{f}S(x)$

ا) ادرس تغيرات الدالة f

ب) استنتج القيمة التي تكون من أجلها مساحة شبه المنحرف أعظمية .

14) في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ارسم المنحنى البياني (γ) للدالة f المعرفة :

$f(x)=\sqrt{x}$ وعلم النقطة $A(4,0)$ في هذا المعلم

نريد تعيين أصغر مسافة بين A و M حيث M نقطة من (γ)

1) بين أن : $AM^2=x^2-7x+16$ حيث : $M(x,y)$

2) لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=x^2-7x+16$

أ) تحقق أن : $g(x)\rangle 0$ على المجال $[0,+\infty[$

ب) أدرس تغيرات الدالة g على هذا المجال وبين أن : g تقبل قيمة حدية صغرى معينا إياها

3) أ) بين أنه إذا كانت g دالة موجبة على المجال I فإن g و g^2 لهما نفس اتجاه تغير على I

ب) استعمل النتيجة السابقة لإثبات أنه توجد نقطة M_0 من (γ) بحيث : AM_0 تكون أصغرية .

4) ما هو معامل توجيه المماس (Δ) لـ : (γ) في النقطة M_0 ثم بين أن : (Δ) والمستقيم (AM_0) متعامدان .

15) شركة تقوم بإنتاج وبيع ألعاب ثمن بيع اللعبة هو : 200 DA وتكلفة إنتاج x لعبة تعطى بالعلاقة :

$$C_x=2x^3-210x^2+7400x+8000$$

1) عبر عن الفائدة المحصل عليها من انتاج وبيع x لعبة

2) عين عدد اللعب الذي تنتجه وتبيعه هذه المؤسسة من أجل التحصل على فائدة قياسية .

الدَّرْس : 5

النهايات

1. نهاية دالة عند زائد مالا نهاية

f دالة معرفة على الأقل على مجال من الشكل : $]a,+\infty[$ و l عدد حقيقي

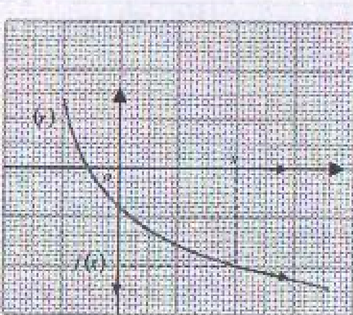
الهدف من هذه الدراسة هو معرفة كيف تصبح قيم $f(x)$ لما x يأخذ قيما تقترب شيئا فشيئا من زائد ما لا نهاية $(+\infty)$

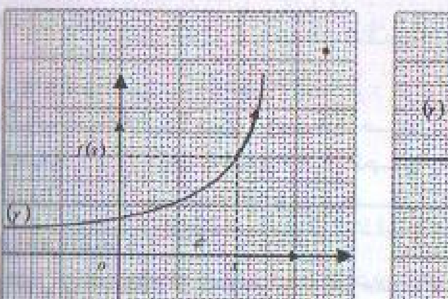
1.1 النهاية الغير منتهية عند زائد لانهاية :

f دالة معرفة على الأقل على مجال من الشكل $]a,+\infty[$

- القول أن f لها نهاية $(+\infty)$ عند $(+\infty)$ وتكتب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

يعني أنه لما x يأخذ قيما تقترب شيئا فشيئا من $(+\infty)$ الأعداد $f(x)$ تقترب شيئا فشيئا من $(+\infty)$.

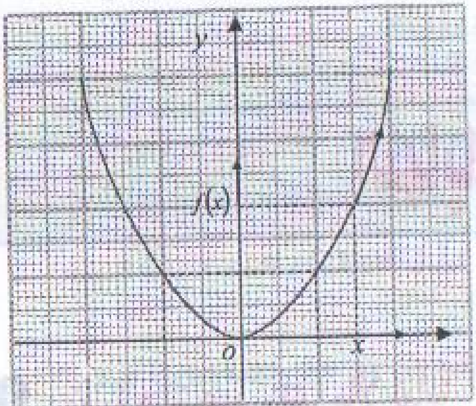




- القول أن f لها نهاية $(-\infty)$ عند $(+\infty)$ ونكتب : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=-\infty$ يعني أنه لما x يأخذ قيما تقترب شيئا فشيئا من $(+\infty)$ الأعداد $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة جدا بالقيمة المطلقة لكن إشارتها سالبة .

مثال ◆

f دالة معرفة على IR بالعبارة $f(x)=x^2$



من أجل كل x بحيث ، $1\langle x$ يكون ، $x\langle x^2$ وعليه لما يأخذ x قيما تقترب شيئا فشيئا من $(+\infty)$ فإن الأعداد x^2 الأكبر من x تأخذ هي كذلك قيما تقترب شيئا فشيئا من $(+\infty)$

و نكتب $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2=+\infty$

- بنفس الكيفية السابقة نبين أن الدالتين $x\mapsto\sqrt{x}$ و $x\mapsto x^3$ لها نهاية $(+\infty)$ عند $(+\infty)$

ونكتب: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

2.1 نهاية حقيقية عند زائد ما لانهاية - المستقيم المقارب الأفقي :

تعريف :

f دالة معرفة على الأقل على مجال من الشكل : $]a\,,+\infty[$.

- القول أن f لها نهاية l عند $(+\infty)$ ونكتب : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=l$ يعني أنه لما x يأخذ قيما تقترب شيئا فشيئا من $(+\infty)$ فإن الأعداد $f(x)$ تقترب شيئا فشيئا من l وبعبارة أخرى الأعداد $f(x)$ تأخذ قيمها من المجال $]l-\alpha\,,l+\alpha[$ حيث ، α عدد صغير وموجب تماما .

ونقول أن المستقيم ذو المعادلة $y=l$ هو مقارب أفقي لمنحنى الدالة f بجوار $(+\infty)$

مثال ◆

f دالة مقلوب معرفة على $]0\,,+\infty[$ ، إليك جدول قيم $f(x)$ من أجل بعض قيم x .

x	1	4	10	10^2	10^5	10^{10}	10^{20}	10^{30}	10^{40}	10^{50}
$f(x)$	1	0,25	0,1	0,01	10^{-5}	10^{-10}	10^{-20}	10^{30}	10^{40}	10^{-50}

نلاحظ من جدول القيم السابق أنه كلما أخذ x قيما تقترب شيئا فشيئا من $(+\infty)$ الأعداد $\frac{1}{x}$ تأخذ قيما تقترب أكثر فأكثر من الصفر وبعبارة أخرى لما $x\rangle M$: فإن ، $f(x)$ تنتمي إلى المجال $\left]0\,,\frac{1}{M}\right[$ ونكتب ؛ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{x}=0$

نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذو المعادلة $y=0$ هو مقارب أفقي لبيان الدالة f في جوار $(+\infty)$

بنفس الكيفية السابقة نبين أن الدالة $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ لها نهاية معدومة عند $(+\infty)$

ونكتب؛ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

تمرين تدريبي

f و g دالتين معرفتين كما يلي : $f(x)=\frac{3x+2}{2x-1}$ و $g(x)=2x^2-2x$

- احسب $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$.

✓ الحل :

1) الدالة f معرفة على المجال $\left]\frac{1}{2}\,,+\infty\right[$ حدسيا لما x يأخذ قيما كبرى ، العدد (-1) مهمل أمام $2x$ كذلك العدد 2 مهمل أمام $3x$ ، وعليه لما x يأخذ قيما كبرى فإن

$f(x)$ تقترب من $\frac{3x}{2x}$ اي تقرب من $\frac{3}{2}$ و هذا يعني ان : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\frac{3}{2}$

2) - من اجل قيم كبرى لـ x حدسيا $2x^2$ تاخذ قيما اكبر بكثير من $2x$ ، نستطيع كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=2x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)$

- من اجل قيم كبرى للعدد x فإن : $1-\frac{1}{x}$ تقترب من العدد 1 عندئذ $f(x)$ يسلك سلوك x^2 في جوار $(+\infty)$ وعليه نكتب : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2=+\infty$.

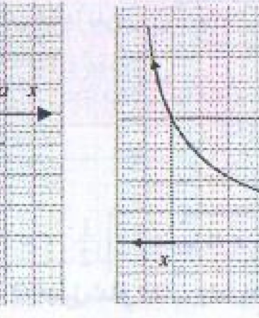
2 - نهاية دالة عند ناقص مالا نهاية

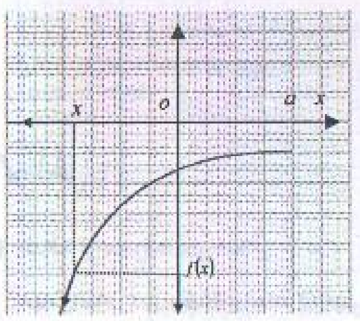
f دالة معرفة على الأقل على مجال من الشكل : $]-\infty, a[$ و a عدد حقيقي
الهدف من هذه الدراسة هو معرفة كيف تصبح قيم $f(x)$ لما x ياخذ قيما سالبة تقترب شيئا فشيئا من $(-\infty)$.

1.2 النهاية الغير منتهية عند ناقص مالا نهاية

- القول أن f لها النهاية $(+\infty)$ عند $(-\infty)$
ونكتب : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=+\infty$ تعني انه لما x ياخذ قيما سالبة كبيرة بالقيمة المطلقة وتقترب شيئا فشيئا من $(-\infty)$ ، الأعداد $f(x)$ تقترب شيئا فشيئا من $(+\infty)$.

- القول أن f لها النهاية $(-\infty)$ عند $(-\infty)$ ونكتب ، $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=-\infty$ يعني انه لما x ياخذ قيما سالبة كبيرة بالقيمة المطلقة تقترب شيئا فشيئا من $(-\infty)$ الأعداد $f(x)$ تقترب شيئا فشيئا من $(-\infty)$



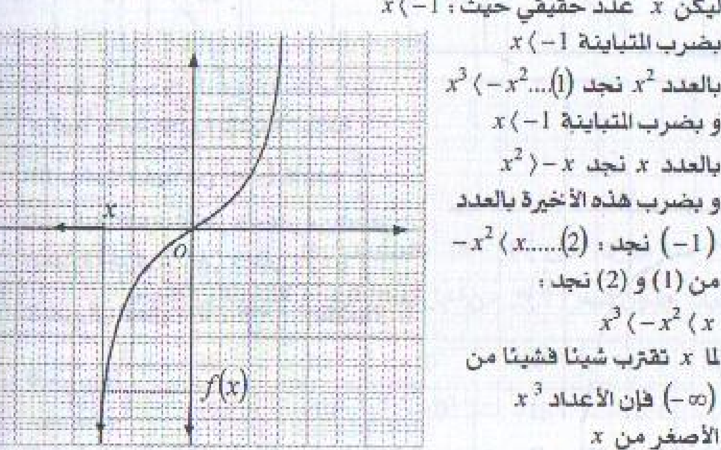


مثال 

f دالة معرفة على IR بالعبارة : $f(x)=x^2$
ليكن x من IR بحيث : $x\langle-1$
بضرب طرفي المتباينة $x\langle-1$
بالعدد x نجد : $x^2\rangle -x$
لما x تقترب شيئا فشيئا من $(-\infty)$ فإن $(-x)$ تقترب شيئا فشيئا من $(+\infty)$ وعليه الأعداد x^2 الأكبر $(-x)$ تقترب شيئا فشيئا من $(+\infty)$
و نكتب : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2=+\infty$

مثال 2

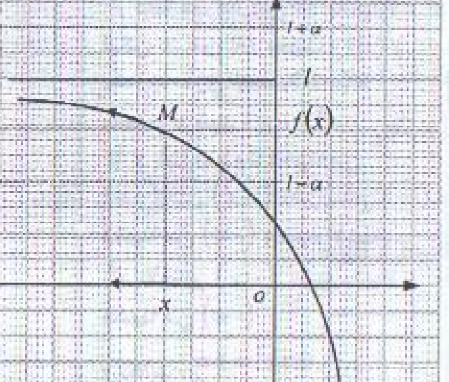
f دالة معرفة على IR بالعبارة : $f(x)=x^3$
ليكن x عدد حقيقي حيث : $x\langle-1$
بضرب المتباينة $x\langle-1$
بالعدد x^2 نجد $x^3\langle-x^2$....(1)
و بضرب المتباينة $x\langle-1$
بالعدد x نجد $x^2\rangle-x$
و بضرب هذه الأخيرة بالعدد (-1) نجد : $-x^2\langle x$......(2)
من (1) و (2) نجد :
$x^3\langle-x^2\langle x$
لما x تقترب شيئا فشيئا من $(-\infty)$ فإن الأعداد x^3 الأصغر من x
تاخذ قيما تقترب شيئا فشيئا من $(-\infty)$ ونكتب : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3=-\infty$



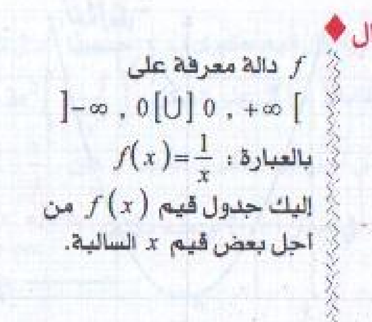
2.2 نهاية حقيقية عند $(-\infty)$ (المستقيم المقارب الأفقي)

- القول أن f لها نهاية l عند $(-\infty)$ ونكتب : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=l$ يعني انه لما x ياخذ قيما سالبة كبيرة بالقيمة المطلقة تقترب شيئا فشيئا من $(-\infty)$ فإن الأعداد $f(x)$ تقترب شيئا فشيئا من l بعبارة اخرى الأعداد $f(x)$ تاخذ قيمها من المجال $]l-\alpha, l+\alpha[$ حيث :

α صغير جدا و $0 \langle \alpha$ ونقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = l$ مقارب أفقي لبيـان الدالـة f بجوار $(-\infty)$.



مثال



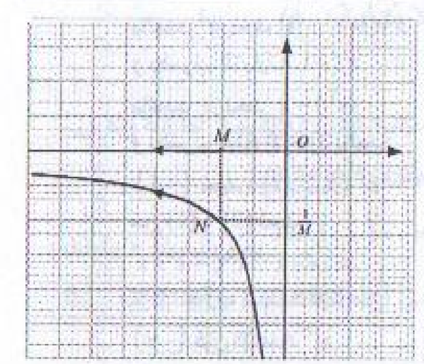
f دالة معرفة على

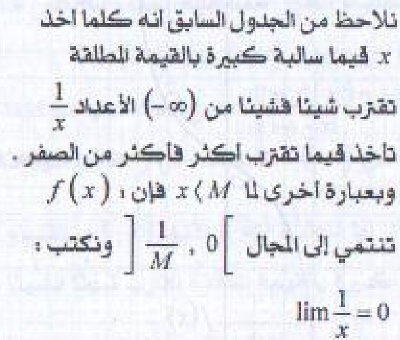
$]-\infty\ ,\ 0[\cup]\ 0\ ,\ +\infty\ [$

بالعبارة : $f(x)=\frac{1}{x}$

إليك جدول قيم $f(x)$ من أجل بعض قيم x السالبة.

x	-1	-4	-10	-10^2	-10^5	-10^{10}	-10^{20}	-10^{30}	-10^{40}	-10^{50}
$f(x)$	-1	$-0,25$	$-0,1$	$-0,01$	-10^{-5}	10^{-10}	-10^{-20}	-10^{-30}	-10^{-40}	-10^{-50}





نلاحظ من الجدول السابق أنه كلما أخذ x قيما سالبة كبيرة بالقيمة المطلقة تقترب شيئا فشيئا من $(-\infty)$ الأعداد $\frac{1}{x}$ تأخذ قيما تقترب أكثر فأكثر من الصفر.

وبعبارة أخرى لما $x \langle M$ فإن، $f(x)$ تنتمي إلى المجال $\left]\frac{1}{M}\ ,\ 0\right[$ ونكتب :

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مقارب أفقي لبيانالدالة f في جوار $(-\infty)$.

❸ - نهاية دالة عند العدد a

لتكن f دالة و D_f مجموعة تعريفها حيث : a إما ينتمي إلى D_f أو a لا تنتمي إلى D_f (a حاد لـ D_f).

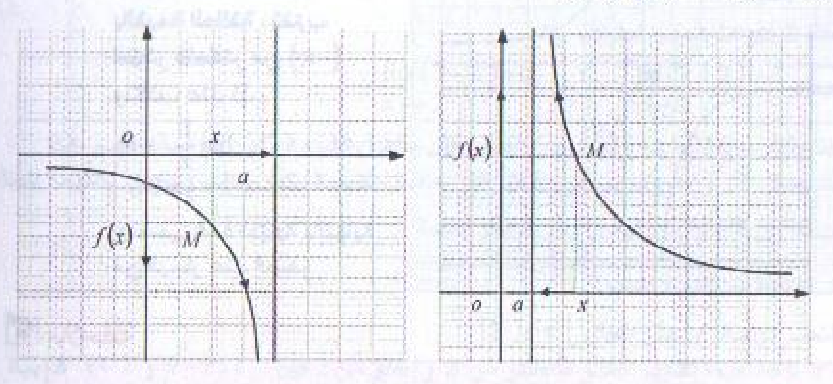
1.3 النهاية اللانهائية عند a - المستقيم المقارب العمودي

- القول أن الدالة f لها النهاية $(+\infty)$ عند a ونكتب : $\lim_{x \mapsto a} f(x) = +\infty$ تعني أنه لما x يأخذ قيما تقترب شيئا فشيئا من a الأعداد $f(x)$ تصبح كبيرة وتقترب شيئا فشيئا من $(+\infty)$.

ونقول في هذه الحالة أن المستقيم ذو المعادلة : $x = a$ مقارب عمودي للمنحني البياني للدالة f

- القول أن الدالة f لها النهاية $(-\infty)$ عند a ونكتب : $\lim_{x \mapsto a} f(x) = -\infty$

تعني أن لما x تقترب شيئا فشيئا من a الأعـداد $f(x)$ تصبح سالبة كبيرة بالقيمة المطلقة وتقترب أكثر فأكثر من $(-\infty)$.



مثال

f دالة معرفة على $IR-\{0\}$ بالعبارة $f(x)=\frac{1}{x}$

إليك جدول قيم $f(x)$ من أجل بعض قيم x القريبة من الصفر

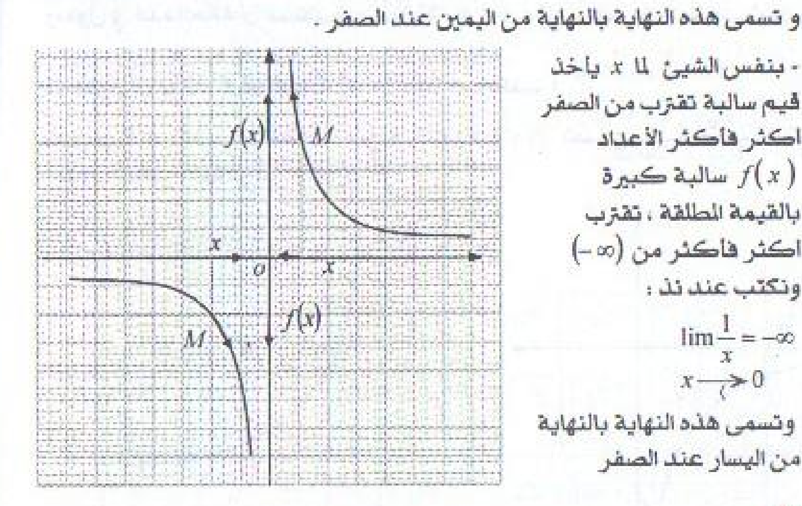
x	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-4}	-10^{-5}	-10^{-6}
$f(x)$	-10^1	-10^2	-10^3	-10^4	-10^5	-10^6

-10^{-7}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
-10^7	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1

نلاحظ من الجدول أنه كلما أخذ x قيما موجبة وصغيرة جدا الأعداد $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة جدا وموجبة ولما x يأخذ قيما سالبة وصغير جدا بالقيمة المطلقة فإن الأعداد $f(x)$ تأخذ قيما سالبة كبيرة جدا بالقيمة المطلقة.

إذن الاعداد د $f(x)$ لا تنتهي إلى $(+\infty)$ ولا إلى $(-\infty)$ ولا تتراكم حول عدد حقيقي . لكن عندما x يأخذ قيما موجبة وتقترب اكثر فاكثر من الصفر الاعداد $f(x)$ تصبح كبيرة جدا وتقترب من $(+\infty)$ ونكتب عندئذ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x} = +\infty$

و تسمى هذه النهاية بالنهاية من اليمين عند الصفر .



- بنفس الشيئ لما x ياخذ قيم سالبة تقترب من الصفر اكثر فاكثر الأعداد $f(x)$ سالبة كبيرة بالقيمة المطلقة ، تقترب اكثر فاكثر من $(-\infty)$ وتكتب عند ئذ :

$$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

وتسمى هذه النهاية بالنهاية من اليسار عند الصفر

ملاحظة

الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ ليست لها نهاية عند الصفر .

2.3 النهاية المنتهية عند a

القول أن الدالة f لها النهاية l عند a ونكتب : $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x) = l$ تعني انه لما x يقترب شيئا فشيئا من a الأعداد $f(x)$ تتراكم حول العدد l

□ **مبرهنة**

1) لما $a \geq 0$ فإن ، $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$

2) p كثير حدود و a عدد حقيقي ، $\lim\limits_{x\mapsto a} p(x) = p(a)$

3) f دالة ناطقة و $a \in D_f$ ، $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x)=f(a)$

4) $\lim\limits_{x\mapsto a} \sin x=\sin a$ ، $\lim\limits_{x\mapsto a} \cos x=\cos a$

تمرين تدريبي

f دالة معرفة بالعبارة التالية ، $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$

f معرفة على $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

- احسب نهاية الدالة f في جوار العدد 2



✓ الحل :

$D_f]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

العدد 2 هو طرف من أطراف D_f

لدينا : $\lim\limits_{x\mapsto 2}(x+2)=4$ و $\lim\limits_{x\mapsto 2}(x-2)=0$

- إذا كان ، $x-2 \rangle 0$ وقريب من الصفر فإن حاصل القسمة يكون موجبا وكبير جدا .

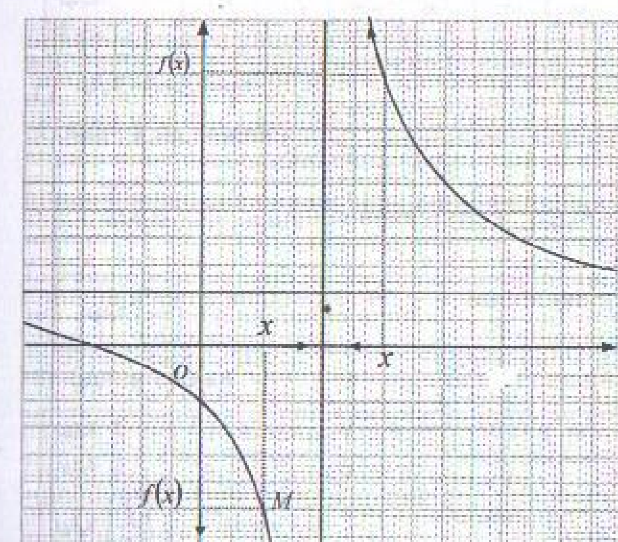
وإذا كان $x-2 \langle 0$ وقريب من الصفر فإن حاصل القسمة يكون سالب وكبير بالقيمة المطلقة

إذن ندرس النهاية من اليمين ومن اليسار عند 2 .

□ النهاية من اليمين عند 2 ،

نقتصر دراسة f على المجال $]2,+\infty[$

لما x تاخذ قيما تقترب اكثر فاكثر من 2 و اكبر من 2 فإن ، $(x-2)\rangle 0$ و $x-2$ قريبة من الصفر و $(x+2)$ قريب من 4 .



إذن العدد ، $\frac{x+2}{x-2}$ يكون موجبا وكبير جدا نقول عند ئذ النهاية من اليمين للدالة f عند 2 هي $(+\infty)$ ونكتب ،

$$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=+\infty$$

□ النهاية من اليسار عند 2:

نقتصر دراسة على المجال ، $]-\infty\ ,\ 2[$

لما x تاخذ قيما تقترب اكثر فاكثر من 2 و اصغر من 2 فإن ،

$x-2 \langle 0$ قريب من الصفر و $x+2$ قريب من 4

إذن العدد $\frac{x+2}{x-2}$ يكون سالبا كبير جدا بالقيمة المطلقة ، نقول عند ئذ النهاية من اليسار للدالة f عند 2 هي : $(-\infty)$ وتكتب : $\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = -\infty$

المستقيم ذو المعادلة : $x = 2$ مقارب عمودي لبيان الدالة f

4. نظريات حول النهايات

لتكن f و g دالتين و l, l' عددين حقيقيين و a عدد حقيقي

نهاية مجموع دالتين

نهاية f	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
نهاية g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
نهاية $(f+g)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	عدم تعيين

نهاية جداء دالتين

نهاية f	l	$l \rangle 0$	$l \rangle 0$	$l \langle 0$	$l \langle 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
نهاية g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية $(f \times g)$	$l \cdot l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	عدم التعين

نهاية حاصل قسمة

1) نهاية g غير معدومة

نهاية f	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية g	$l' \neq 0$	$+\infty$ أو $-\infty$	$l' \rangle 0$	$l' \langle 0$	$l' \rangle 0$	$l' \langle 0$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية $\left(\frac{f}{g}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	عدم التعيين

2) نهاية g معدومة

نهاية f	$0 \langle l$ أو $+\infty$	$0 \langle l$ أو $+\infty$	$0 \rangle l$ أو $-\infty$	$0 \rangle l$ أو $-\infty$	0
نهاية g	0^+	$\overline{0}$	0^+	$\overline{0}$	0
نهاية $\left(\frac{f}{g}\right)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	عدم التعيين

حالات عدم التعيين هي : $\frac{0}{0}$ ، $+\infty-\infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty \times 0$

خلاصة :

1) نهاية الدالة مربع : $\lim_{x \to -\infty} x^2 = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

2) نهاية دالة مقلوب : $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ، $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x} = +\infty$

3) نهاية الدالة الجذر التربيعي : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ، $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$

تمرين تدريبي 1

احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x \to -\infty} x^3$ ، $\lim_{x \to +\infty} x^3$

2) $\lim_{x \to -\infty} (x^3+x+2)$ ، $\lim_{x \to +\infty} (x^3+x+2)$

3) $\lim_{x \to 2} (2-x)\sqrt{x+1}$ ، $\lim_{x \to 4} x\sqrt{x}$

4) $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{2x+1}{\sqrt{x}}$ ، $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{x}{\sqrt{1-x}}$

5) $\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} \frac{x+3}{2x-1}$ ، $\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} \frac{x+3}{2x-1}$

الحل :

1) $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ لأن : $x^3 = x^2 \times x$ و $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ لأن : $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

2) $\lim_{x \to -\infty} (x^3+x+2) = -\infty$ لأن : $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (x^3+x+2) = +\infty$ لأن : $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty$

3) $\lim_{x \to 2} (2-x)\sqrt{x+1} = 0$ لأن : $\lim_{x \to 2} (2-x) = 0$ و $\lim_{x \to 2} \sqrt{x+1} = \sqrt{3}$

$\lim_{x \to 4} x\sqrt{x} = 8$ لأن : $\lim_{x \to 4} x = 4$ و $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$

(4 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{2x+1}{\sqrt{x}} = +\infty$ لأن، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (2x+1) = 1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \sqrt{x} = 0^+$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{x}{\sqrt{1-x}} = +\infty$ لأن، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} x = 1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \sqrt{1-x} = 0^+$

(5 $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} \frac{x+3}{2x-1} = -\infty$ لأن، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} (x+3) = \frac{7}{2}$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} (2x-1) = 0^-$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} \frac{x+3}{2x-1} = +\infty$ لأن، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} (x+3) = \frac{7}{2}$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} (2x-1) = 0^+$

تمرين تدريبي 2

- احسب النهايات التالية:

(1 $\lim\limits_{x \mapsto -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1}$ ، (3 $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (x-\sqrt{x})$

(2 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x}$ ، (4 $\lim\limits_{x \mapsto 1} (1-x)\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

الحل:

(1 $\lim\limits_{x \mapsto -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \frac{0}{0}$

من أجل كل x من IR، $x^2+2x+1 = (x+1)^2$

و منه من أجل كل x من $IR-\{-1\}$: $\frac{x^2+2x+1}{x+1} = x+1$

بالتالي، $\lim\limits_{x \mapsto -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1} (x+1) = 0$

(2 $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$

من أجل كل x من: $]0,+\infty[$: $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

بالتالي، $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

(3 $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (x-\sqrt{x}) = +\infty - \infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (x-\sqrt{x}) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x}\right) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} x = +\infty$ لأن، $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

(4 $\lim (1-x) \times \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 0 \times +\infty$

$\frac{1-x}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x} \times \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}$

من أجل كل، x من $]-\infty,1[$ ، $\frac{1-x}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

و منه: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{1-x}{\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty$ لأن، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \sqrt{1-x} = 0^+$

5 - دراسة دالة كثير الحدود

1.5 النهاية عند اللانهاية لكثير الحدود

f دالة كثير حدود معرفة على IR بالعبارة:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ حيث: $a_n \neq 0$

لما $x \neq 0$ ، $f(x)$ تكتب على الشكل:

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \ldots + \frac{a_2}{a_n x^{n-2}} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

لكن، $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{a_0}{a_n x^n} = \ldots\ldots = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n x} = 0$

و عليه، $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = 1$

بالتالي: نهاية $f(x)$ هي نهاية، $a_n x^n$

نتحصل على نفس النتيجة لما x يؤول إلى $(-\infty)$

□ مبرهنة :

عند ما لا نهاية نهاية دالة كثير حدود تساوي نهاية وحيد الحد الأكبر درجة .

◆ مثال

$$\lim_{x\to+\infty}(2x^2+3x+2)=\lim_{x\mapsto+\infty}2x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}(2x^2+3x+2)=\lim_{x\mapsto-\infty}2x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}(-3x^4+3x^2+x)=\lim_{x\mapsto+\infty}-3x^4=-\infty$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}(-3x^4+3x^2+x)=\lim_{x\to-\infty}-3x^4=-\infty$$

تمرين تدريبي

f دالة معرفة على IR بالعبارة التالية : $f(x)=2x^3-3x^2+1$

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) احسب : $f(1)$ ثم حل المعادلة : $f(x)=0$

3) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة f

✓ الحل :

1) دراسة تغيرات الدالة f ؛ $D_f=]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}2x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR لأنها دالة كثير حدود ولدينا من أجل كل x من IR

$$f'(x)=6x^2-6x$$

$f'(x)=0$ يكافئ $(x=0)$ أو $(x=1)$

إشارة $f'(x)$ مدونة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	0	+	

$f'(x)>0$ إذا وفقط إذا : $x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[1,+\infty[$

إذا كان $x\in]0,1[$ فإن $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0,1]$

□ جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	0	+	
تغيرات f	$-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

$f(0)=1$ ، $f(1)=0$

2) بما أن $f(1)=0$ فإن من أجل كل x من IR :

$f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$ حيث : $a\neq0$

بعد النشر والتبسيط نجد : $f(x)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$ بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد :

$a=2$ و $b-a=-3$ و $c-b=0$ و $-c=1$ منه نستنتج : $a=2$ و $b=-1$ و $c=-1$

إذن : $f(x)=(x-1)(2x^2-x-1)$

$f(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(2x^2-x-1=0)$

$2x^2-x-1=0$ يكافئ $(x=1)$ أو $\left(x=-\frac{1}{2}\right)$

بالتالي : $f(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ أو $\left(x=-\frac{1}{2}\right)$

اي ان المنحنى (γ) للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين

$A(1,0)$ ، $B\left(\frac{-1}{2},0\right)$

3) الرسم

جدول قيم مساعد لرسم بيان الدالة f

x	$\frac{1}{2}$	-1	2
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	-4	5

6 - دالة ناطقة (المستقيم المقارب المائل)

1.6 النهاية عند ما لانهاية لدالة ناطقة

f دالة ناطقة معرفة على D_f بالعبارة التالية

$$f(x)=\frac{a_n\ x^n+a_{n-1}\ x^{n-1}+.....a_1\ x+a_0}{b_m\ x^m+b_{m-1}\ x^{m-1}+.....+b_1\ x+b_0}$$

حيث : $a_n\neq 0$ و $b_m\neq 0$ و n و m عددين طبيعيين ؛

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_n\ x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n\ x}+.....+\frac{a_1}{a_n\ x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n\ x^n}\right)}{b_m\ x^m\left(1+\frac{b_{m-1}}{b_m x}+...+\frac{b_1}{b_m\ x^{m-1}}+\frac{b_0}{b_m\ x^m}\right)}$$

بما أن : $\lim\frac{a_{n-1}}{a_n x}=.....=\lim\frac{a_1}{a_n\ x^{n-1}}=\lim\frac{a_0}{a_n\ x^n}=0$

فإن : $\lim_{x\mapsto+\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n\ x}+.....+\frac{a_1}{a_n\ x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n\ x^n}\right)=1$

و بما أن : $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{b_{m-1}}{b_m\ x}=....=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{b_1}{b_m\ x^{m-1}}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{b_0}{b_m x^m}=0$

فإن : $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{b_{m-1}}{b_m\ x}+...+\frac{b_1}{b_m\ x^{m-1}}+\frac{b_0}{b_m\ x^m}\right)=1$

إذن : $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{a_n\ x^n}{b_m\ x^m}$

بالتالي نستنتج أن نهاية f عند $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ هي نهاية الدالة ؛ $x\mapsto\frac{a_n\ x^n}{b_m\ x^m}$ عند $(+\infty)$ أو $(-\infty)$

نتيجة

نهاية دالة ناطقة عند اللانهاية تساوي نهاية حاصل قسمة وحيد الحد الأكبر درجة في البسط على وحيد الحد الأكبر درجة في المقام

مثال

- احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}$ ، $\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x+2}{x-1}$

2) $\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+3x+2}$ ، $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+3x+2}$

3) $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^3+x+1}{x-1}$ ، $\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x^3+x+1}{x-1}$

الحل :

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{x}=1$

$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x}{x}=1$

2) $\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+3x+2}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{1}{x}=0$

$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3}=\lim\frac{1}{x^2}=0$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\mapsto+\infty}x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x+1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

2.6 المستقيم المقارب المائل :

f دالة ناطقة حيث : $f=\frac{P}{Q}$ و P و Q كثيري حدود

إذا كانت درجة P = درجة $Q+1$ فإنه يمكن كتابة $f(x)$ على شكل ،

$f(x)=ax+b+g(x)$ حيث : $a\neq 0$ و

هذا تحليل وحيد لـ $f(x)$ ؛

- إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

نقول ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=ax+b$

مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $(+\infty)$ أو $(-\infty)$.

❑ حالة عامة : f دالة

إذا كانت $f(x)$ تكتب على الشكل :

$ax+b+g(x)$ مع $a\neq 0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

فإن المستقيم ذو المعادلة : $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f

❑ طريقة لإثبات (Δ) مستقيم مقارب

لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة : $y=ax+b$ حيث: $a\neq 0$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (γ) الممثل للدالة f في جوار $(+\infty)$ أو $(-\infty)$

نحسب : $f(x)-(ax+b)$ وتبين أن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$

❑ لدارسة وضعية المنحني (γ) الممثل للدالة f بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=ax+b$ نعين إشارة الفرق $f(x)-(ax+b)$

مثال ♦

لتكن f دالة معرفة بالعبارة التالية : $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+1}{3x-3}$

بين أن المستقيم ذو لمعادلة $y=x+2$ مقارب للمنحني الممثل للدالة f

الحل :

$$f(x)-(x+2)=\frac{3x^2+3x+1}{3x-3}-(x+2)=\frac{3x^3+3x+1-(x+2)(3x-3)}{3x-3}$$

$$=\frac{3x^2+3x+1-(3x^3-3x+6x-6)}{3x-3}=\frac{7}{3x-3}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{7}{3x-3}=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل للمنحنى (γ) الممثل للدالة f

تمرين تدريبي

لتكن f دالة معرفة و بالعبارة التالية : $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) عين الأعداد الحقيقية a , b , c بحيث: من أجل كل x من D_f :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$$

ثم استنتج معادلة مستقيم المقارب المائل لـ (γ) الممثل للدالة f

3) عين نقط تقاطع (γ) مع محاور الاحداثيات

4) ارسم (γ) في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الحل :

1) دراسة تغيرات f

الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان : $x-3\neq 0$ أي $x\neq 3$ ومنه :

$D_f=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$

حساب النهايات على أطراف مجال التعريف :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

• $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3} f(x)=+\infty$ لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}(x^2-2x+1)=4\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}(x-3)=0^+\end{cases}$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}3} f(x)=-\infty$ لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}3}(x^2-2x+1)=4\\ \lim\limits_{x\overset{<}{\to}3}(x-3)=\bar{0}\end{cases}$

❑ اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا من اجل كل من D_f

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-3)-(1)(x^2-2x+1)}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{2x^2-6x-2x+6-x^2+2x-1}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$$

$f'(x)=0$ يكافئ: $x^2-6x+5=0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=5)$

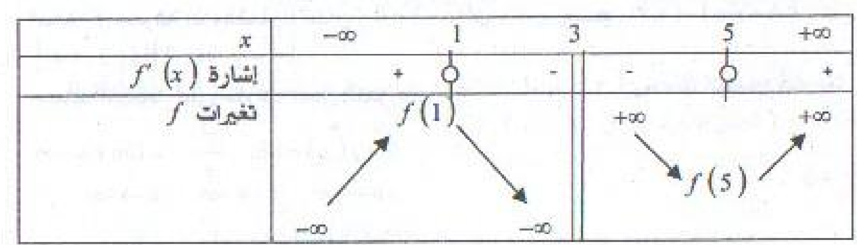
إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة (x^2-6x+5)

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
إشارة (x^2-6x+5)		+	0	-	0	+	

إذا كان: $x\in]-\infty,1[\cup]5,+\infty[$ فإن $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]5,+\infty[$

- إذا كان $x\in]1,3[\cup]3,5[$ فإن $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على كل من $]1,3[$ و $]3,5[$

□ جدول تغيرات f



x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
تغيرات f	$-\infty$ ↗		$f(1)$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f(5)$	↗ $+\infty$	

$f(1)=0$ ، $f(5)=8$

2) تعيين الأعداد الحقيقية a، b، c بحيث: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$

من اجل كل x من D_f:

$$f(x)=\frac{(ax+b)(x-3)+c}{x-3}=\frac{ax^2-3ax+bx-3b+c}{x-3}$$

$$=\frac{ax^2+(-3a+b)x-3b+c}{x-3}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد: $\begin{cases}a=1\\-3a+b=-2\\-3b+c=+1\end{cases}$ منه نجد: $\begin{cases}a=1\\b=1\\c=4\end{cases}$

إذن: $f(x)=x+1+\frac{4}{x-3}$

2007-04-27

لدينا: $f(x)-(x+1)=\frac{4}{x-3}$ و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{4}{x-3}=0$

إذن نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f في جوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$

3) تقاطع (γ) مع (xx') و (yy')

□ (γ) تقاطع (xx')

$f(x)=0$ يكافئ: $\frac{x^2-2x+1}{x-3}=0$ يكافئ: $x^2-2x+1=0$ و $x\neq3$

ومنه نجد: $(x=1)$

إذن (γ) يقطع (xx') في نقطة وحيدة $A(1,0)$

□ (γ) تقاطع (yy') $x=0$ و $y=f(0)$

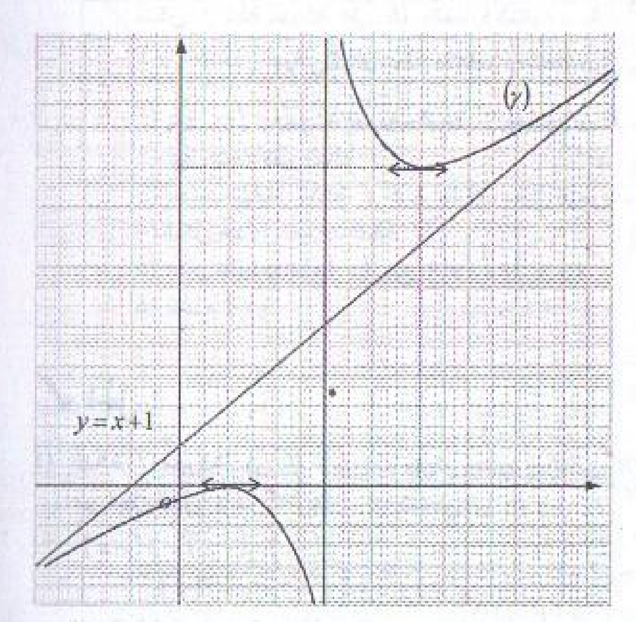
$y=f(0)=-\frac{1}{3}$ منه (γ) يقطع (yy') في نقطة وحيدة $B\left(0,-\frac{1}{3}\right)$

4) بما أن: $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=-\infty$

فإن المنحني (γ) له مستقيم مقارب معادلته $x=3$

□ بما أن: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x+1)=0$

فإن المنحني (γ) له مستقيم مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$ معادلته $y=x+1$



7 - الخطوات المتبعة لدراسة دالة وتمثيل بيانها

- لدراسة دالة نتبع الخطوات التالية :
  1) تعين مجموعة تعريف الدالة f
  2) دراسة شفعية ودورية الدالة f
  - نقتصر مجال الدراسة
  - تعيين عناصر التناظر المنحني المثل للدالة f
  3) دراسة اتجاه تغير الدالة f مع تعيين القيم الحدية العظمى والصغرى إن وجدت
  4) حساب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف وتعيين المستقيمات المقاربة للمنحني أن وجدت
  5) تشكيل جدول تغيرات الدالة f

- لرسم بيان الدالة f نستعين بما يلي :
  - رسم المستقيمات المقاربة
  - تحديد بعض النقاط من (γ) وتعيين نقط تقاطع (γ) مع محاور الإحداثيات .
  - إظهار عناصر التناظر في الشكل

تمرين تدريبي

لتكن f دالة معرفة على IR بالعبارة التالية : $f(x)=x^3-3x$ وليكن (γ) المنحني البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم بين أن f دالة زوجية
2) عين اتجاه تغير الدالة f
3) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال التعريف
4) شكل جدول تغيرات الدالة f
5) عين نقط تقاطع (γ) مع (xx') و (yy')
6) ارسم (γ)

✓ الحل :

1) الدالة f معرفة على IR لأنها دالة كثير حدود وبالتالي: $D_f=IR^*$

من أجل كل x من IR^* فإن : $-x$ تنتمي إلى IR و :

$$f(-x)=(-x)^3-3(-x)$$
$$=-x^3+3x=-(x^3-3x)=-f(x)$$

إذن الدالة f فردية وبالتالي نقتصر دراستها على $D_f\cap IR_+=IR_+=[0,+\infty[$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على IR فهي قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ولدينا من جل كل x من $[0,+\infty[$ ؛ $f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$ يكافئ $3(x^2-1)=0$

يكافئ $(x=1)$ أو $(x=-1)$

x	0		1		$+\infty$
إشارة $(3x^2-3)$		-	0	+	

- إذا كان $x\in[0,1[$ فإن : $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة على $]0,1]$
- إذا كان $x\in]1,+\infty[$ فإن : $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة على $[1,+\infty[$

3) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{\to+\infty} x^3=+\infty$$

4) جدول التغيرات f على المجال $[0,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	0	+	
تغيرات f	0	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

5) تعيين نقط تقاطع (γ) مع (xx') و (yy')

- تعيين نقط تقاطع (γ) مع (xx')

$f(x)=0$ يكافئ ؛ $x^3-3x=0$

يكافئ $(x=0)$ أو $x^2-3=0$

$x^2-3=0$ يكافئ $(x=\sqrt{3})$ أو $(x=-\sqrt{3})$

منه (γ) يقطع (xx') في ثلاث نقط $O(0,0)$، $A(\sqrt{3},0)$، $B(-\sqrt{3},0)$

- تعيين نقط تقاطع (γ) مع (yy')

$x=0$ و $y=f(0)$ لكن $f(0)=0$

منه (γ) يقطع (yy') في النقطة $O(0,0)$.

6) ارسم المنحني (γ)

بما أن الدالة f فردية فإننا نرسم جزء من بيانها على المجال $[0,+\infty[$ ونتم رسم الجزء الآخر بالتناظر بالنسبة إلى المركز O .

إليك جدول القيم المساعد لرسم بيان الدالة f

x	2	-2	0	1	-1
$f(x)$	$+2$	-2	0	-2	2

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 : تعيين مجموعة تعريف - حساب النهايات

- عين مجموعة تعريف كل من الدوال التالية ثم احسب النهايات على أطراف مجال تعريفها

1) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ ، 2) $f(x)=3x^2-3x-2$

3) $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{-2x+1}$ ، 4) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{2x^2+x-1}$

5) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^3}$ ، 6) $f(x)=\dfrac{2-4x}{2x+1}$

الحل :

1) الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان : $x+1\neq 0$ أي : $x\neq -1$

ومنه : $D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

□ حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{2x-3}{x+1}=+\infty$$ لأن $$\begin{cases}\lim_{x\xrightarrow{<}-1}(2x-3)=-5\\ \lim_{x\xrightarrow{<}-1}(x+1)=0^-\end{cases}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$$ لأن $$\begin{cases}\lim_{x\xrightarrow{>}-1}(2x-3)=-5\\ \lim_{x\xrightarrow{>}-1}(x+1)=0^+\end{cases}$$

2) الدالة f معرفة على IR لأنها دالة كثير حدود ومنه ، $D_f=]-\infty,+\infty[$

□ حساب النهايات :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$

3) الدالة f معرفة إذا فقط إذا كان: $-2x+1\neq 0$

$-2x+1\neq 0$ يكافئ $x\neq\frac{1}{2}$ ومنه مجموعة تعريف الدالة f هي:

$$D_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$$

❑ حساب النهايات

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{-2x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{2}x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{2}x = -\infty$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} (3x^2+2x)-1 = \frac{3}{4} \\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} (-2x+1) = 0^+ \end{cases}$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$ لأن $\begin{cases} \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (3x^2+2x-1) = \frac{3}{4} \\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (-2x+1) = 0^- \end{cases}$

4) الدالة f معرفة إذا فقط إذا كان: $2x^2+x-1\neq 0$

$2x^2+x-1=0 .....(1)$

$\Delta = b^2-4ac$ بالحساب نجد: $\Delta = 1^2-4(2)(-1)=9$

إذن المعادلة (1) لها حلين: x_1 و x_2 حيث.

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ ، $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{4} = -1$

إذن: $D_f = IR-\left\{\frac{1}{2},-1\right\}$ ومنه: $D_f =]-\infty,-1[\cup \left]-1,\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

❑ حساب لنهايات:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to-1} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

إزالة حالة عدم التعيين

لدينا: $(x^2-x-2) = (x+1)(x-2)$ و $2x^2+x-1 = (x+1)(2x-1)$

إذن من أجل كل x من D_f لدينا: $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(2x-1)} = \frac{x-1}{2x+1}$

ومنه: $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x-2}{2x-1} = 1$ و $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x-2}{2x-1} = 1$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim_{x\to\frac{1}{2}} (x^2-x-2) = \frac{-9}{4} \\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} (2x^2+x-1) = 0^- \\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (2x^2+x-1) = 0^+ \end{cases}$

x		-1		$\frac{1}{2}$	
إشارة $(2x^2+x-1)$	+	0	-	0	+

5) f معرفة إذا وفقط إذا كان: $x^3\neq 0$

$x^3\neq 0$ يكافئ $x\neq 0$ ومنه: $D_f = IR-\{0\}$

إذن: $D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

❑ حساب النهايات:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty$ لأن $\begin{pmatrix} \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} (x+3) = 3 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} x^3 = 0^- \end{pmatrix}$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$ لأن $\begin{pmatrix} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (x+3) = 3 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^3 = 0^+ \end{pmatrix}$

6) الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كانت : $2x+1 \neq 0$

$2x+1 \neq 0$ يكافئ $x \neq -\frac{1}{2}$ ومنه : $D_f = IR - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$$D_f = \left]-\infty, \frac{-1}{2}\right[\cup \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$$

□ حساب النهايات :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x}{2x} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{2x} = \frac{-4}{2} = -2$$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{-1}{2}} f(x) = -\infty$ لأن $\begin{pmatrix} \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{-1}{2}} (2-4x) = 4 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{-1}{2}} (2x+1) = 0^- \end{pmatrix}$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{-1}{2}} f(x) = +\infty$ لأن $\begin{pmatrix} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{-1}{2}} (2-4x) = 4 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{-1}{2}} (2x+1) = 0^+ \end{pmatrix}$

تطبيق 2 : استخراج مجموعة تعريف – النهايات – اتجاه التغير من الجدول

f و g دالتين جدول تغيراتهما كما يلي :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	‖	+	
تغيرات f	3	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		+	0	-	0	+	
تغيرات g	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	2

استعمل الجدولين السابقين لتعين ما يلي :

1) مجموعة تعريف كل من f و g

2) النهايات f و g على أطراف مجال تعريفهما

3) اتجاه تغير f و g

4) إنشاء منحنى f و g

✓ الحل :

1) مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f = \left]-\infty, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ ومجموعة تعريف الدالة g هي : $D_g = \left]-\infty, +\infty\right[$

2) تعيين النهايات :

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

3) اتجاه تغير f و g

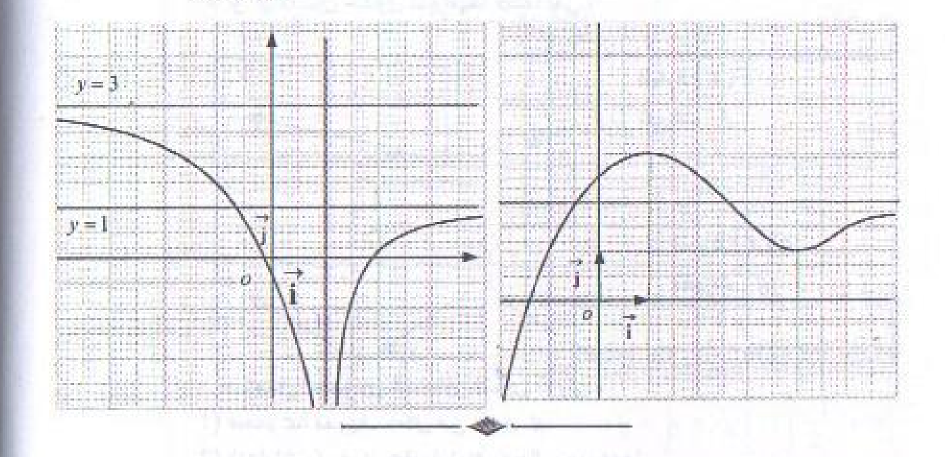
الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty, 1\right[$ و متزايدة تماما على المجال $\left]1, +\infty\right[$

الدالة g متزايدة تماما على كل من المجالين $\left]-\infty, 1\right]$ و $\left[4, +\infty\right[$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[1, 4\right]$

4) رسم (C_f) و (C_g) : بيان الدالة f له ثلاث مستقيمات مقاربة معادلتها هي : $y=3$ ، $y=1$ ، $x=1$ لأن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

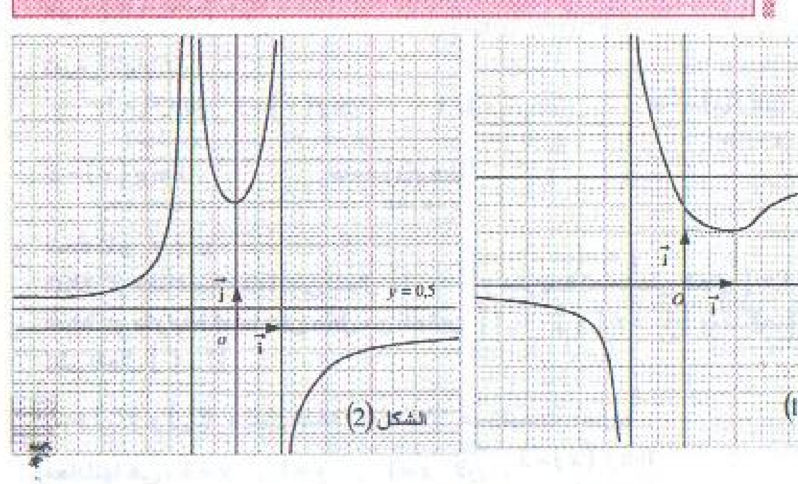
و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)=-\infty$

- بيان الدالة g له مستقيم مقارب معادلته $y=2$ ؛ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$



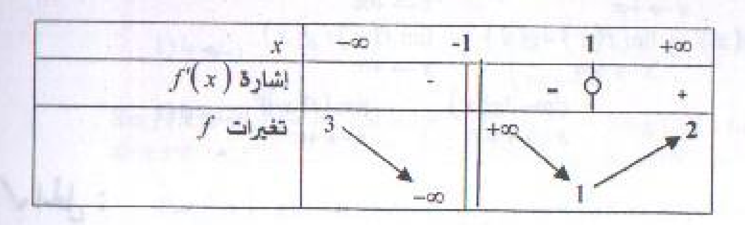
تطبيق . 3: استخراج جدول التغيرات لدالة من البيان

f و g دالتين بياناهما على التوالي الشكل 1 و الشكل 2
استعانة بالمثيلات السابقة عين ما يلي :
1) جدول تغيرات الدالتين f و g
2) معادلات المستقيمات المقاربة لـ : (C_f) و (C_g)



✓ الحل :

1) جدول تغيرات الدالتين f و g هو : على الترتيب



x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	||	-	0	+	
تغيرات f	3	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1	↗	2

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		+	||	-	0	+	||	+	
تغيرات g	$\frac{1}{2}$	↗ $+\infty$	||	$+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	0

2) معادلات المستقيمات المقاربة :

- بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$
فإن : $y=0$ مستقيم مقارب لـ : (C_f)

- بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$
فإن : $y=2$ مستقيم مقارب لـ : (C_f)

- بما أن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)=+\infty$
فإن المستقيم $x=-1$ مقارب لـ : (C_f)

- بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$
فإن المستقيمين ذوا المعادلتين $y=\frac{1}{2}$ ، $y=0$ مقاربين لـ (C_g)

- بما أن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} g(x)=+\infty$
فإن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب لـ (C_g)

تطبيق . 4 : حساب نهايات مجموع - جداء دالتين

إذا علمت أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

1) اوجد: $\lim_{x\to+\infty} f(x)+g(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)\,g(x)$

2) اوجد: $\lim_{x\to+\infty} (f(x))^2$ ، $\lim_{x\to+\infty} -2g(x)$

✓الحل :

1) $\lim_{x\to+\infty} (f(x)+g(x))=2+\infty=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-g(x))=2-\infty=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,g(x)=2\times(+\infty)=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} (f(x))^2=(+\infty)(+\infty)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} -2g(x)=-2(+\infty)=-\infty$

تطبيق . 5 : حساب نهايات دوال ناطقة ودوال كثير حدود

في كل حالة من الحالات التالية اوجد:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)+g(x)$

1) $f(x)=4x+2$ ، $g(x)=-x+1$

2) $f(x)=x-\frac{1}{x}$ ، $g(x)=x^2+x$

3) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ، $g(x)=\frac{1}{x}+1$

✓الحل :

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

و منه: $\lim_{x\to+\infty} f(x)+g(x)=+\infty-\infty$ عدم التعيين

من اجل كل x من IR ، $f(x)+g(x)=3x+3$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty} f(x)+g(x)=\lim_{x\to+\infty}(3x+3)=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن: $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\right)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ ومنه: $\lim_{x\to+\infty} f(x)+g(x)=+\infty+\infty=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$ و منه: $\lim_{x\to+\infty} f(x)+g(x)=1+0=1$

تطبيق . 6 : حساب نهاية جداء دالتين

في كل حالة من الحالات التالية اوجد:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)$

1) $f(x)=x^2$ ، $g(x)=\frac{1}{x^2}$

2) $f(x)=x^2+1$ ، $g(x)=\frac{1}{2x+3}$

✓الحل :

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ و منه: $\lim f(x)g(x)=0\times\infty$ ⇐ عدم التعيين

من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم: $f(x)g(x)=1$ ومنه: $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)=1$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim\frac{1}{2x}=0$ ومنه: $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)=0\times\infty$ ⇐ عدم التعيين

من اجل كل x من IR بحيث: $2x+3\neq0$ لدينا: $f(x)g(x)=\frac{x^2+1}{2x+3}$ ومنه

$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$

تطبيق . 7 : حساب نهايات قسمة دالتين

في كل حالة من الحالات التالية أوجد: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$

1) $f(x)=x^2+x$ ، $g(x)=2x-3$

2) $f(x)=\frac{-1}{x}$ ، $g(x)=\frac{1}{x^3}$

الحل:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{+\infty}{+\infty}$ عدم التعيين

من اجل كل x من IR بحيث: $2x-3\neq 0$ لدينا: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2+x}{2x-3}$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ عدم التعيين

من اجل كل x من $IR-\{0\}$ لدينا: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{-1}{x}}{\frac{1}{x^3}}=-x^2$ ومنه، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

تطبيق . 8 : حساب نهايات دوال عند عدد

1) عين نهاية كل دالة من الدوال التالية عند العدد 5

$f(x)=x^2+5x-3$ ، $h(x)=\sqrt{2x-1}$

2) عين نهاية كل دالة من الدوال التالية عند العدد $\frac{\pi}{2}$

$k(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ، $L(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

الحل:

1) الدالة f معرفة على IR و $5\in IR$ ومنه: $\lim\limits_{x\to5} f(x)=f(5)=25+25-3=47$

* الدالة g معرفة على IR و $5\in IR$ ومنه: $\lim\limits_{x\to5} g(x)=g(5)=\frac{10}{25+3}=\frac{10}{28}$

غير موجودة في السؤال

□ الدالة h معرفة على: $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ و $5\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ ومنه: $\lim\limits_{x\to5} h(x)=h(5)=\sqrt{2\times5-1}=\sqrt{9}=3$

2) الدالة k معرفة على IR و $\frac{\pi}{2}\in IR$ ومنه: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} k(x)=k\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi)=0$

الدالة L معرفة على IR و $\frac{\pi}{2}\in IR$ ومنه: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} l(x)=l\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos 0=1$

تطبيق . 9 : حساب نهايات دوال ناطقة عند عدد

ادرس النهاية عند a لكل دالة من الدوال التالية:

1) $f(x)=\frac{x+1}{x}$ ، $a=0$

2) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ ، $a=1$

3) $f(x)=\frac{x^2-3}{-x+2}$ ، $a=2$

4) $f(x)=\frac{3x}{x^2-x-6}$ ، $a=-2$

5) $f(x)=\frac{2x^2+8}{x+2}$ ، $a=-2$

الحل:

1) الدالة f معرفة على: $D_f=IR-\{0\}$ و الدالة f ليس لها نهاية عند الصفر

لأن: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{x+1}{x}=-\infty$ ؛ $\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}(x+1)=1\\ \lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} x=0^-\end{cases}$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x+1}{x} = +\infty$ لأن: $\left(\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x = 0^+ \right)$

2) الدالة f معرفة على: $D_f = IR - \{1\}$

من أجل $x = 1$ مقام الدالة f معدوم والبسط غير معدوم وعليه نحسب النهاية من اليمين ومن اليسار

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$ لأن $\left(\lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2 \ ; \ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} (x-1) = 0^- \right)$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$ لأن $\left(\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} (x-1) = 0^+ \right)$

3) الدالة f معرفة على $D_f = IR - \{2\}$ ومن أجل $x = 2$ مقام الدالة معدوم والبسط غير معدوم وعليه نحسب النهاية من اليسار ومن اليمين عند 2

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = +\infty$ لأن $\left(\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} (x^2 - 3) = 1 \ ; \ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} (-x+2) = 0^+ \right)$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = -\infty$ لأن $\left(\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} (-x+2) = 0^- \right)$

4) الدالة f معرفة على $D_f = IR - \{-2, 3\}$

من أجل $x = -2$ مقام الدالة f معدوم و البسط غير معدوم ومنه نحسب النهاية من اليسار ومن اليمين عند العدد -2.

لدينا :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x^2 - x - 6$		+	0	-	0	+	

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = \lim \frac{3x}{x^2 - x - 6} = -\infty$ لأن $\left(\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} (x^2 - x - 6) = 0^+ \ ; \ \lim\limits_{x \to -2} 3x = -6 \right)$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = +\infty$ لأن $\left(\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} (x^2 - x - 6) = 0^- \ ; \ \lim\limits_{x \to -2} (3x) = -6 \right)$

5) الدالة f معرفة على: $D_f = IR - \{-2\}$

من أجل $x = -2$ المقام وبسط الدالة f معدومين وبالتالي: $2x^2 - 8 = 2(x-2)(x+2)$

إذن: من أجل: $x \neq -2$ ؛ $f(x) = 2(x-2)$ و منه: $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (2)(x-2) = -8$

تطبيق 10 : رسم بيان دالة كثير حدود من الدرجة الثانية

لتكن f دالة معرفة على IR كما يلي: $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

1) احسب نهاية الدالة f على أطراف مجال التعريف

2) احسب $f'(x)$ وعين إشارته ثم إستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات f

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = x_0$ حيث: $f'(x_0) = 0$ هو محور تناظر لبيان الدالة f

4) عين نقط تقاطع (C_f) مع محاور الاحداثيات ثم أرسم (C_f) في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

✓ الحل :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^2 = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا، من أجل كل x من IR ؛ $f'(x) = 4x + 4$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	0	+	

- إذا كان: $x \in]-\infty, -1[$ فإن $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة على $]-\infty, -1]$
- إذا كان: $x \in]-1, +\infty[$ فإن: $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[-1, +\infty[$

□ جدول تغيرات f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	0	+	
تغيرات f	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$+\infty$

3) $(\Delta): x=-1$ محور تناظر لـ (C_f) إذا وفقط إذا كان من أجل كل $x\in IR$ ، $-2-x\in IR$ و $f(-2-x)=f(x)$

$$f(-2-x)=2(-2-x)^2+4(-2-x)-6=2(4+4x+x^2)-8-4x-6$$
$$=8+8x+2x^2-8-4x-6=2x^2+4x-6=f(x)$$

منه $(\Delta): x=-1$ محور تناظر لـ (C_f)

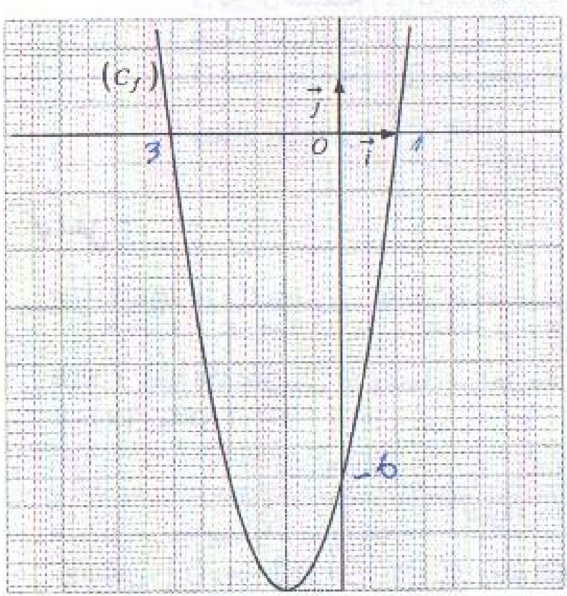
4) تعيين نقط تقاطع (C_f) مع (xx')

المعادلة $f(x)=0$ لها حلين هما -3، 1. ومنه (C_f) يقطع (xx') في النقطتين $A(1,0)$ و $B(-3,0)$

□ تعيين نقط تقاطع (C_f) و (yy')

$x=0$ و $y=f(0)=-6$

ومنه (C_f) يقطع (yy') في النقطة $C(0,-6)$.



□ كل دالة من الشكل: $x\mapsto ax^2+bx+c$ مع: $a\neq 0$ هي دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية تمثيلها البياني هو قطع مكافئ فاصلة ذروته هي: $\frac{-b}{2a}$ واتجاهه حسب إشارة a (إذا كان $a>0$ يكون مشدود نحو الأعلى وإذا كان $a<0$ يكون مشدود نحو الأسفل).

تطبيق 11: تحديد دالة ورسم بيانها

لتكن الدالة كثير الحدود f المعرفة على IR بالعبارة التالية: $f(x)=ax^3+bx+c$ حيث: $a\neq 0$ و c و b أعداد حقيقية وليكن (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أوجد الأعداد الحقيقية a ، b,c بحيث المنحى (γ) يشمل النقطتين $A(1,0)$ ، $B(0,2)$ والمماس لـ (γ) عند B يوازي المستقيم ذو المعادلة: $y=-3x$.

2) ادرس تغيرات الدالة المحصل عليها في السؤال 1) ثم ارسم (γ)

✓ الحل:

1) النقطة A تنتمي إلى (γ) يعني أن: $f(1)=0$ و منه $a+b+c=0.......(1)$

النقطة B تنتمي إلى (γ) تعني أن: $f(0)=2$ و منه $c=2$

ميل المماس للمنحني عند النقطة B هو $f'(0)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR لأنها دالة كثير حدود و لدينا من اجل كل x من IR :

$f'(x)=3ax^2+b$ ، $f'(o)=b$

المماس يوازي المستقيم ذو المعادلة: $y=-3x$ هذا معناه ان: $f'(o)=-3$ ومنه $b=-3$

بتعويض قيمة b و c في المساواة (1) نجد $a=1$ إذن الدالة المطلوبة هي:

$$f(x)=x^3-3x+2$$

2) دراسة تغيرات الدالة f

□ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

□ الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x ينتمي إلى IR $f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$ يكافئ: $3(x^2-1)=0$ يكافئ: $(x=1)$ أو $(x=-1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	0	+	

- إذا كان: $x\in]-1,1[$ فإن: $f'(x)<0$ ومنه، f متناقصة تماما على $[-1,1]$
- إذا كان: $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن: $f'(x)>0$

ومنه f متزايدة تماما على كل من المجالين: $]-\infty,-1]$ و $[1,+\infty[$

□ جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	0	+	
تغيرات f	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

□ جدول قيم مساعد لرسم (γ) :

x	1	-1	-2	2
$f(x)$	0	4	0	4

□ تقاطع (γ) مع (yy')

$x=0$ و $y=f(0)=2$ منه ، (γ) يقطع (yy') في $B(0,2)$

□ تقاطع (γ) مع (xx')

لدينا: $f(1)=0$ ومنه ، $f(x)$ تكتب على الشكل :

$$f(x)=(x-1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$$

بعد النشر والتبسيط نجد :

$$f(x)=\alpha x^3+(\beta-\alpha)x^2+(\gamma-\beta)x-\gamma$$

وبالمطابقة ، مع عبارة ؛ $f(x)$ نجد :

$\alpha=1$ و $\beta-\alpha=0$ و

$\gamma-\beta=-3$ و $-\gamma=2$ منه نجد :

$\alpha=1$ و $B=1$ و $\gamma=-2$ وبالتالي ؛ $f(x)=(x-1)(x^2+x-2)$

$f(x)=0$ يكافئ ؛ $(x-1=0)$ او $(x^2+x-2=0)$ يكافئ ؛ $(x=1)$ او $(x=-2)$

ومنه ، (γ) يقطع ؛ (xx') في نقطتين إحداثياتهما $(1,0)$ و $(-2,0)$

تطبيق . 12 : تعيين معادلة قطع مكافئ يشمل ثلاث نقاط

هل توجد دالة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية بحيث المنحى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ يمر من النقط ؛ $A(0,1)$ ، $B(1,3)$ ، $C(3,1)$ ؟

✓ الحل :

نفرض انه توجد دالة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية f بيانها يمر من النقط C,B,A

هذه الدالة تكون من الشكل ؛ $f(x)=ax^2+bx+c$

A تنتمي إلى (γ) يكافئ ؛ $f(0)=1$ يكافئ $c=1$

B تنتمي إلى (γ) يكافئ ؛ $f(1)=3$ يكافئ ؛ $a+b+c=3$

C تنتمي إلى (γ) يكافئ ؛ $f(3)=1$ يكافئ ، $9a+3b+c=1$

نضع ؛ $a+b+c=3$........(1) ، $9a+3b+c=3$........(2)

بتعويض قيمة c في (1) و (2) نجد ؛ $a+b=2$ و $9a+3b=0$

$a+b=2$ يكافئ ؛ $a=2-b$

نعوض قيمة a في المساواة ؛ $9a+3b=0$ نجد ؛ $18-9b+3b=0$ منه ؛ $18-6b=0$ أي ؛

$b=3$ وعليه ؛ $a=2-3=-1$

إذن توجد دالة f حيث ؛ $f(x)=-x^2+3x+1$ بيانها يمر من النقط ؛ C,B,A .

تطبيق . 13 : تعيين دالة تناظرية بيانها له مستقيمين مقاربين معلومين

1) هل توجد دالة تناظرية f معرفة بـ: $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ بحيث بيانها (γ) يمر من النقطة $A(1,1)$ ويقبل المستقيمين اللذان معادلتهما ؛ $x=-2$ و $y=2$ مقاربين له

2) في حالة وجود هذه الدالة ادرس تغيراتها ثم أرسم منحناها البياني (γ) في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

✓ الحل :

1) A تنتمي إلى (γ) يكافئ ؛ $f(1)=1$ يكافئ $\dfrac{a+b}{c+d}=1$ يكافئ $a+b=c+d$

□ المستقيم ذوا المعادلة $x=-2$ مقارب لـ: (γ) هذا معناه أن ؛ (-2) حلا للمعالة ؛ $cx+d=0$ اي ؛ $-2c+d=0$ و $-2a+b\neq 0$

□ المستقيم ذوا المعادلة $y=2$ مقارب لـ ؛ (γ) هذا معناه أن ؛

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=2$ لكن ؛ $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\dfrac{a}{c}$ إذن ؛ $\dfrac{a}{c}=2$ منه ينتج ؛ $a=2c$



الشروط السابقة هي :

$a+b=c+d$ ....(1) , $d=2c$ .....(2) , $a=2c$ ....(3) , $b\neq 2a$ ....(4)

بالتعويض d و a في المعادلة (1) نجد : $2c+b=c+2c$ أي : $b=c$

- إذا كان : $c=0$ فإن : $a=d=b=0$ ومنه لا توجد دالة تناظرية
- إذا كان : $c\neq 0$ فإن الدالة f تكتب على الشكل :

$$f(x)=\frac{2cx+c}{cx+2c}=\frac{c(2x+1)}{c(x+2)}=\frac{2x+1}{x+2}$$

بالتالي توجد دالة تناظرية f معرفة بالشكل : $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$

2) دراسة تغيرات الدالة f

□ مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=IR-\{-2\}=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

□ حساب النهايات : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ ، $\lim_{x\overset{<}{\to}-2} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\overset{>}{\to}-2} f(x)=-\infty$ لأن $\left(\lim_{x\to-2} 2x+1=-3\right)$

و $\left(\lim_{x\overset{<}{\to}-2} x+2=0^-\right)$ و $\left(\lim_{x\overset{>}{\to}-2} x+2=0^+\right)$

□ المشتق : الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا من اجل كل x من D_f ؛

$f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2}$ بالتبسيط نجد : $f'(x)=\frac{3}{(x+2)^2}$

من اجل x من D_f : $\frac{3}{(x+2)^2}>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين : $]-\infty,-2[$ و $]-2,+\infty[$

□ جدول تغيرات f

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	‖	+
تغيرات f	2 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ 2

□ تقاطع (γ) مع (xx') :

$f(x)=0$ يكافئ $\frac{2x+1}{x+2}=0$ يكافئ $2x+1=0$ و $x+2\neq 0$ يكافئ $x=\frac{-1}{2}$

$x=\frac{-1}{2}$ يحقق الشرط : $x+2\neq 0$

ومنه المنحني (γ) يقطع (xx')

في النقطة ذات الإحداثيات $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

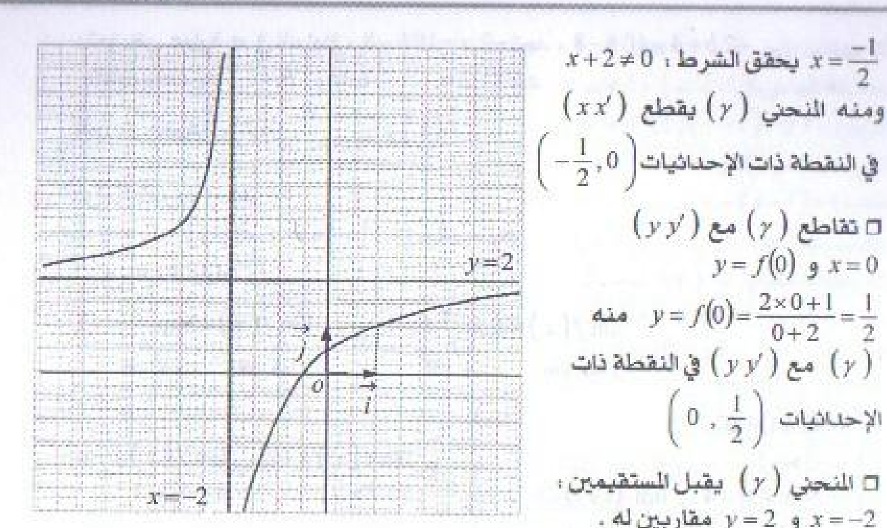
□ تقاطع (γ) مع (yy')

$x=0$ و $y=f(0)$

$y=f(0)=\frac{2\times 0+1}{0+2}=\frac{1}{2}$ منه

(γ) مع (yy') في النقطة ذات الإحداثيات $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

□ المنحني (γ) يقبل المستقيمين : $x=-2$ و $y=2$ مقاربين له .



تطبيق 14 : تعيين دالة تناظرية بيانها يشمل ثلاث نقط معلومة

1) هل توجد أعداد حقيقية : a, b, c بحيث : المنحني البياني للدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x)=\frac{ax+3}{bx+c}$ يمر من النقط $A(1,1)$ ، $B(0,3)$ ، $C(-2,-5)$

2) في حالة وجود هذه الأعداد أدرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحناها البياني و المماسين عند A و B

✓ الحل :

1) □ A تنتمي إلى (γ) تكافئ $f(1)=1$

$f(1)=1$ يكافئ $\frac{a+3}{b+c}=1$ يكافئ $a+3=b+c$.

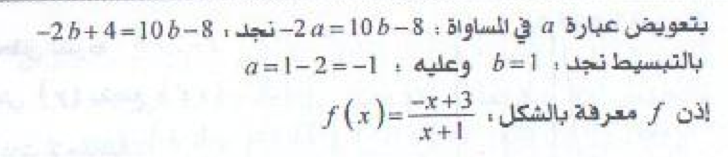
□ B تنتمي إلى (γ) يعني : $f(0)=3$

$f(0)=3$ يكافئ : $\frac{3}{c}=3$ يكافئ $c=1$

□ C تنتمي إلى (γ) يعني : $f(-2)=-5$

$f(-2)=-5$ يكافئ : $\frac{-2a+3}{-2b+c}=-5$ يكافئ : $-2a+3=10b-5c$

إذن : $\begin{cases} a+3=b+c \\ c=1 \\ -2a+3=10b-5c \end{cases}$ منه ينتج : $\begin{cases} a=b-2 \\ -2a=10b-8 \end{cases}$



بتعويض عبارة a في المساواة : $-2a=10b-8$ ، نجد $-2b+4=10b-8$

بالتبسيط نجد ، $b=1$ وعليه ، $a=1-2=-1$

إذن f معرفة بالشكل ، $f(x)=\dfrac{-x+3}{x+1}$

2) دراسة تغيرات الدالة f

$D_f=IR-\{-1\}=]-\infty\ ,\ -1[\cup]-1,+\infty[$

☐ حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x}=-1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x}=-1$

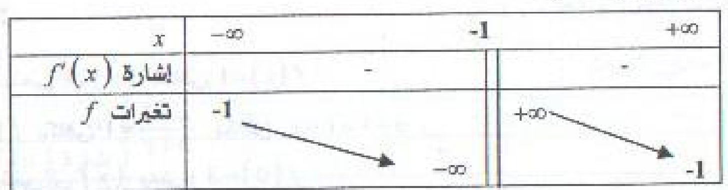
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1}(x+1)=0^- \\ \lim\limits_{x\to-1}(-x+3)=4\ ,\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}(x+1)=0^+\end{cases}$

من حساب النهايات نستنتج أن المستقيمان اللذان معادلتهما : $x=-1$ و $y=-1$ مقاربان للمنحني (γ) الممثل للدالة f

☐ الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا من اجل كل x من D_f ؛ $f'(x)=\dfrac{-4}{(x+1)^2}$

لاحظ أن من اجل كل x من D_f ، $\dfrac{-4}{(x+1)^2}<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين ؛ $]-\infty\ ,-1[$ و $]-1\ ,+\infty[$.

☐ جدول تغيرات f ؛



x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$-$	‖	$-$	
تغيرات f	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1

☐ تقاطع المنحني مع محاور الإحداثيات

☐ مع (xx') ؛

$f(x)=0$ يكافئ ، $\dfrac{-x+3}{x+1}=0$ ، يكافئ ؛ $-x+3=0$ و $x+1\neq0$ يكافئ ؛ $x=3$ ؛

منه ؛ (γ) يقطع ؛ (xx') في النقطة ذات الاحداثيتي $(3\ ,\ 0)$

☐ مع (yy') ، $x=0$ و $y=f(0)=3$

منه ؛ (γ) يقطع (yy') في النقطة $B(0,3)$

☐ معادلة الماس لـ (γ) عند A

معادلة المماس: لـ (d_1) لـ (γ) عند A

هي: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

لكن ؛ $f'(1)=-1$

منه؛ $y=-(x-1)+1$

بالتبسيط نجد ؛ $(d_1): y=-x+2$

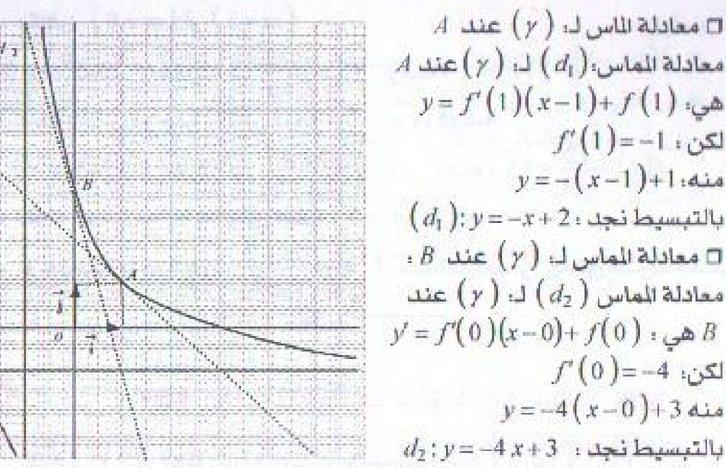
☐ معادلة المماس لـ (γ) عند B ؛

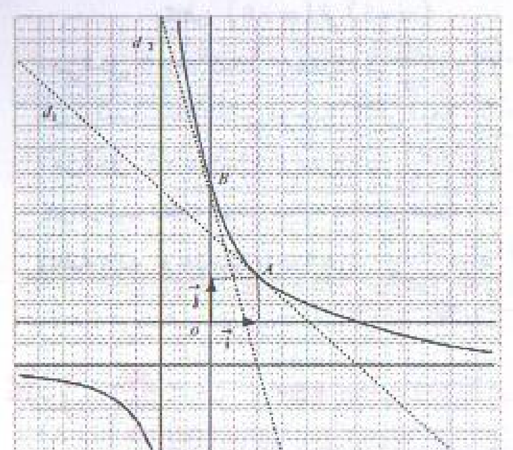
معادلة المماس (d_2) لـ (γ) عند B هي ؛ $y'=f'(0)(x-0)+f(0)$

لكن: $f'(0)=-4$

منه $y=-4(x-0)+3$

بالتبسيط نجد ؛ $d_2: y=-4x+3$





تطبيق 15 : تعيين دالة تناظرية بمعرفة مماس لبيانها

لتكن الدوال التناظرية f المعرفة بـ ؛ $f(x)=\dfrac{mx+2+m}{x-m}$

حيث m عدد حقيقي وليكن (γ) منحناها البياني في معلم معطى

اوجد جميع المنحنيات (γ) بحيث للماس لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$ يوازي المستقيم ذوا المعادلة ، $y=-2x+3$ ونقطة الماس ترتيبها سالب

✓ الحل :

مجموعة تعريف الدالة f هي ؛ $D_f=IR-\{m\}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ،

$f'(x)=\dfrac{-m^2-2-m}{(x-m)^2}$

ميل الماس للمنحني (γ) عند النقطة ذات الفاصلة ؛ $x=1$ هو ؛ $f'(1)$

$f'(1)=\dfrac{-m^2-2-m}{(1-m)^2}=\dfrac{-m^2-2-m}{m^2-2m+1}$

الماس يوازي المستقيم ذوا المعادلة ؛ $y=-2x+2$ هذا معناه أن ؛ $f'(1)=-2$

$f'(1)=-2$ يكافئ $\dfrac{-m^2-2-m}{m^2-2m+1}=-2$ يكافئ $-m^2-2-m=-2(m^2-2m+1)$ و $m\neq1$

يكافئ $-m^2-2-m=-2m^2+4m-2$ و $m\neq1$

يكافئ $(m=0)$ أو $(m=5)$

- من أجل $m=0$ الدالة f معرفة بـ: $f(x)=\frac{2}{x}$ ومنه ، $f(1)=2$

إذن ترتيب نقطة المماس موجبة بالتالي قيمة ، $m=0$ مرفوضة

- من أجل $m=5$ الدالة f معرفة بـ: $f(x)=\frac{5x+7}{x-5}$ ومنه ، $f(1)=\frac{12}{-4}=-3$

إذن ترتيب نقطة المماس سالبة وبالتالي قيمة ، $m=5$ مقبولة ؛

وعليه فإنه توجد دالة واحدة هي ، $f:x\mapsto\frac{5x+7}{x-5}$ منحناها البياني يحقق الشرط المعطى

تطبيق . 16 : اختيار دالة مناسبة تحقق شروط معطاة

المنحنى (γ) الممثل لدالة يقبل المستقيمات ؛ $(d_1),(d_2)$ و (Δ) كمستقيمات مقاربة له وهذه المستقيمات وحيدة كما هو مبين في الشكل المجاور .

1) من بين الدوال التالية ما هي الدوال التي بيانها يحقق الشروط السابقة مع العلم أن ، $(b\in IR^*)$

$f(x)=\frac{3x^2+(b+10)x}{x^2+3x+2}$ ،

$g(x)=\frac{2x+b}{x^2+3x+2}$ ،

$h(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{b}{x+2}+3$

2) من بين الدوال التي تحقق الشرط السؤال 1) هل يمكن اختيار العدد b بحيث ، المنحنى (γ) .

أ) يقطع (Δ) في نقطة فاصلتها 1 .

ب) يقبل مماس عند النقطة O افقي

الحل :

1) الدالة g لا تحقق الشروط لأن ، $\lim_{|x|\to\infty} g(x)=0$

أي بيانها يقبل المستقيم ذو المعادلة ، $y=0$ مقارب له

□ بما أن ، $(d_1):x=-1$ و $(d_2):x=-2$ مستقيمان مقاربان فإن (-1) و (-2) لا يعدمان بسط $f(x)$ من أجل كل قيم ، $b\in IR^*$ ، لكن من أجل $x=-1$ بسط $f(x)$

يساوي ؛

$3+(b+10)(-1)$ أي ، $-b-7$ وهذه القيمة تنعدم من أجل ، $b=-7$

نفس الشيء من اجل ، $x=-2$ نجد بسط $f(x)$ يساوي ، $-2b-8$ وهذه القيمة تنعدم من اجل $b=-4$ وبالتالي الدالة f لا تحقق الشروط المعطاة في الشكل

□ بعد تبسيط عبارة $h(x)$ نجد ، $h(x)=\frac{3x^2+(b+10)x+8+b}{x^2+3x+2}$

من اجل $x=-1$ بسط $h(x)$ يساوي 1

من اجل $x=-2$ بسط $h(x)$ يساوي $-b$ وبما أن ، $b\in IR^*$ فإن ، $-b\neq 0$

إذن القيم $x=-1$ و $x=-2$ يعدمان مقام $h(x)$ ولا يعدمان بسطه وبالتالي ، (d_1) و (d_2) مستقيمان مقاربان لـ، (γ) وكذلك ، $\lim_{|x|\to+\infty}h(x)=3$

إذن الدالة h تحقق الشروط فهي الدالة التي بيانها يقبل المستقيمات $(d_1),(d_2)$ ، (Δ) مقاربة له .

2) أ) (γ) يقطع (Δ) في النقطة ذات لفاصلة 1 هذا يعني ، $h(1)=3$

$h(1)=3$ يكافئ $\frac{2b+21}{6}=3$ يكافئ $b=\frac{-3}{2}$

ب) المنحنى (γ) يقبل مماس أفقي عند الصفر هذا معناه أن ، $h'(0)=0$

الدالة h قابلة للاشتقاق على D_h ولدينا من أجل كل x من D_h ؛

$h'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}-\frac{b}{(x+2)^2}$ ومنه ، $h'(0)=-1-\frac{b}{4}$

$h'(0)=0$ يكافئ ، $-1-\frac{b}{4}=0$ يكافئ ، $\frac{b}{4}=-1$ يكافئ ، $b=-4$.

تطبيق . 17 : حل معادلات – مركز تناظر – المماسات

f دالة معرفة على IR بالعبارة التالية ، $f(x)=x^3-3x^2-5x+2$

وليكن ، (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس ، $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أدرس تغيرات الدالة f

2) بين أن النقطة $I(1,-5)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

3) ارسم (C_f)

4) g دالة معرفة على $IR-\{-1\}$ بالعبارة ، $g(x)=\frac{2-3x}{x+1}$

وليكن ، (H) المنحنى البياني لها في نفس المعلم السابق

ادرس تغيرات g ثم ارسم (H)

5) عين نقط تقاطع (H) و (C_f)

6) بين أن للمنحنيين (H) و (C_f) لهما مماس مشترك عند النقطة $A(0,2)$

✓ الحل :

1) دراسة تغيرات f

□ النهايات $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

□ الدالة f قابلة للاشتقاق على IR لأنها دالة كثير حدود

ولدينا من أجل كل x من IR ، $f'(x)=3x^2-6x-5$

$f'(x)=0$ يكافئ : $3x^2-6x-5=0$

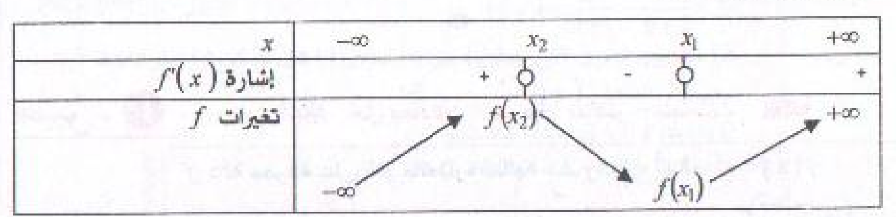
$\Delta=(-6)^2-4(3)(-5)=36+60=96$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة $3x^2-6x-5=0$ لها حلين هما : x_2 ، x_1

$x_1=\dfrac{6+\sqrt{96}}{6}=\dfrac{6+4\sqrt6}{6}$ ، $x_2=\dfrac{6-4\sqrt6}{6}$

- إذا كان $x\in]x_2,x_1[$ فإن $f'(x)<0$ ومنه f متناقصة تماما على المجال $]x_2 , x_1[$
- إذا كان $x\in]-\infty,x_2[\cup]x_1,+\infty[$ فإن : $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,x_2[$ و $]x_1,+\infty[$

□ جدول تغيرات f :



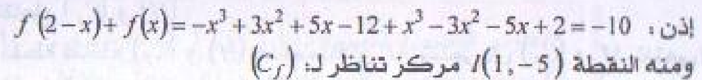
x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	0	+	
تغيرات f	$-\infty$	↗	$f(x_2)$	↘	$f(x_1)$	↗	$+\infty$

$x_1\approx2,63$ ، $f(x_1)\approx13,7$ ، $x_2\approx-0,63$ ، $f(x_2)\approx4,5$

2) إثبات أن النقطة $I(1,-5)$ مركز تناظر لـ: (C_f)

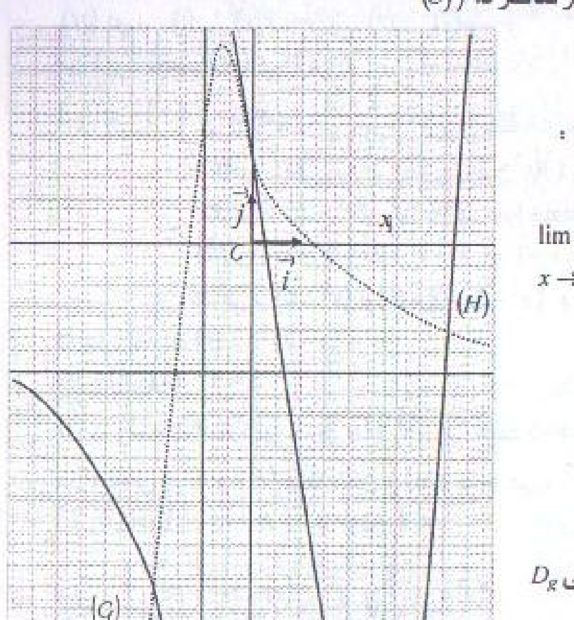
$I(1,-5)$ مركز تناظر لـ: (C_f) إذا وفقط إذا كان ، من أجل كل : $x\in IR$ ، $2-x\in IR$ و $f(2-x)+f(x)=-10$

$$f(2-x)=(2-x)^3-3(2-x)^2-5(2-x)+2$$
$$=(8-12x+6x^2-x^3)-3(4-4x+x^2)-10+5x+2=-x^3+3x^2+5x-12$$



إذن : $f(2-x)+f(x)=-x^3+3x^2+5x-12+x^3-3x^2-5x+2=-10$

ومنه النقطة $I(1,-5)$ مركز تناظر لـ: (C_f)



3) رسم (C_f)

المنحنى (C_f) له ذروة هي : $((x_2),f(x_2))$ وحضيض هي : $((x_1),f(x_1))$

4) النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{x}=-3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{x}=-3$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} g(x)=+\infty$

□ الدالة g قابلة للاشتقاق على D_g

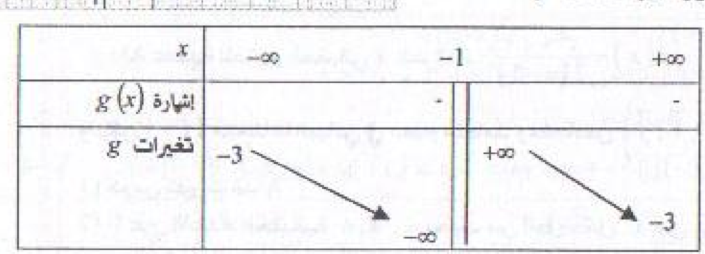
ولدينا من أجل x من D_g

$g'(x)=\dfrac{-3(x+1)-(-1)(2-3x)}{(x+1)^2}=\dfrac{-5}{(x+1)^2}$

من أجل x من D_g لدينا : $g'(x)<0$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على كل المجالين $]-\infty,-1[$ و $]-1,+\infty[$

□ جدول تغيرات الدالة g



x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $g(x)$		-	‖	-	
تغيرات g	-3 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘ -3

□ رسم (H) : المستقيمان ذو المعادلة $x=-1$ و $y=-3$ مقاربان للمنحنى (H)

$(H)\cap(xx')=\left\{M_1\left(\frac{2}{3},0\right)\right\}$ ، $(H)\cap(yy')=\{A(0,2)\}$

5) تعيين نقط تقاطع (C_f) و (H)

$M(x\ ,\ y)$ نقطة تقاطع (C_f) و (H) هذا معناه أن M تنتمي إلى (C_f) و M تنتمي إلى (H) أي: $y=f(x)\ .\ ...(1)$ و $y=g(x).....(2)$

من 1 و 2 نجد: $f(x)=g(x)$ و $x\in IR-\{-1\}$

$f(x)=g(x)$ تكافئ: $x^3-3x^2-5x+2=\frac{2-3x}{1+x}$ و $x\neq -1$

تكافئ: $(x+1)(x^3-3x^2-5x+2)=2-3x$ و $x\neq -1$

تكافئ: $x^4-2x^3-8x^2=0$ و $x\neq -1$

تكافئ: $x^2(x^2-2x-8)=0$ و $x\neq -1$

تكافئ: $(x^2=0)$ أو $(x^2-2x-8=0)$ و $x\neq -1$

□ حل المعادلة $x^2-2x-8=0\ ...(I)$

$\Delta=4-4(1)(-8)=36$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة I لها حلين هما x_1', x_2' حيث: $x_1'=\frac{2+6}{2}=4$ ، $x_2'=\frac{2-6}{2}=-2$

إذن المنحنى (C_f) و (H) يتقاطعان في ثلاث نقط هي:
$A(0,2)$, $B(4,-2)$, $C(-2,-8)$

6) لدينا: $f'(x)=3x^2-6x-5$ و $g'(x)=\frac{-5}{(x+1)^2}$

$f'(0)=-5$ و $g'(0)=-5$

بما أن $f'(0)=g'(0)$ و $f(0)=g(0)$ فإن المنحنين (C_f) و (H) لهما نفس مماس مشترك (d) معادلته $(d): y=-5(x-0)+2$ أي: $(d): y=-5x+2$

تطبيق 18 : حل معادلة بيانيا - رسم بيان دالة بالاعتماد على بيان معلوم

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ: $f(x)=\frac{x^2+2x}{2(x-1)}$

وليكن (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أدرس تغيرات الدالة f

2) أ) عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث من أجل كل x من D_f:
$f(x)=ax+b+\frac{c}{2x-2}$.

ب) استنتج معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ)

ج) أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) ثم ارسم (C_f) و (Δ)

3) حدد بيانيا وتبعا لقيم m عدد وإشارة حلول المعادلة:
$x^2+2(1-m)x+2m=0$

4) لتكن g دالة معرفة كما يلي: $g(x)=\frac{|x^2+2x|}{2(x-1)}$

أ) اكتب عبارة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

ب) استنتج بيان الدالة g انطلاقا من بيان الدالة f .

✓ الحل :

1) دراسة تغيرات الدالة f :

الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان: $2(x-1)\neq 0$

$2(x-1)\neq 0$ يكافئ $x\neq 1$ ومنه: $D_f=IR-\{1\}=]-\infty\ ,1[\cup]1\ ,+\infty[$

□ حساب النهايات:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2}=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ لأن
$$\begin{cases}\lim_{x\to 1}(x^2+2x)=3\\ \lim_{x\to 1^-}(x-1)=0^-\\ \lim_{x\to 1^+}(x-1)=0^+\end{cases}$$

□ الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f لأنها دالة ناطقة و من أجل كل $x\in D_f$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(2x-2)-2(x^2+2x)}{4(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-2}{2(x-1)^2}$$

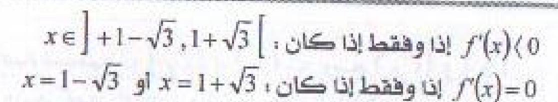
$f'(x)=0$ تكافئ: $x^2-2x-2=0$ و $x\in D_f$:

$x^2-2x-2=0.....(1)$

$\Delta=4-4(1)(-2)=12$ ومنه المعادلة (1) لها حلين هما: $x_1=1+\sqrt{3}$ ، $x_2=1-\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
إشارة (x^2-2x-2)		+	0	-	0	+	

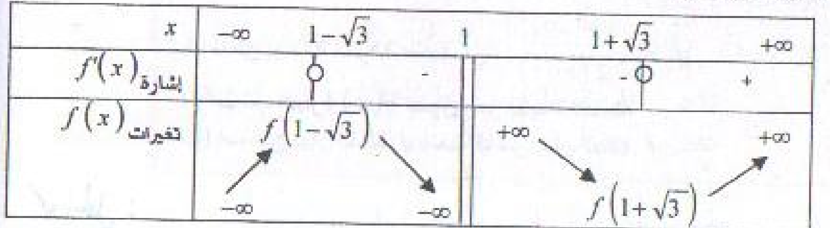
إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة (x^2-2x-2) وعليه يكون: $f'(x)>0$ إذا وفقط إذا كان
$x\in]-\infty\ ,1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}\ ,+\infty[$



$f'(x)<0$ إذا وفقط إذا كان : $x\in\left]1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right[$

$f'(x)=0$ إذا وفقط إذا كان ، $x=1+\sqrt{3}$ أو $x=1-\sqrt{3}$

□ جدول تغيرات f



x	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		0	-	‖	-	0	+
تغيرات $f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(1-\sqrt{3})$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f(1+\sqrt{3})$	↗ $+\infty$

$1-\sqrt{3}\approx-0{,}73$ ، $1+\sqrt{3}\approx2{,}73$

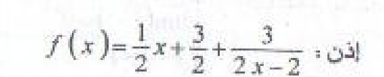
$f(1-\sqrt{3})=2-\sqrt{3}\approx0{,}27$ ، $f(1+\sqrt{3})=2+\sqrt{3}\approx3{,}73$

2) ا) تعيين الأعداد الحقيقية : a ، b ، c

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{2x-2}=\frac{(ax+b)(2x-2)+c}{2x-2}=\frac{2ax^2+(-2a+2b)x-2b+c}{2x-2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد :

$$\begin{cases}2a=1\\-2a+2a=2\\-2a+c=0\end{cases}$$ ومنه ينتج ، $$\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=\frac{3}{2}\\c=3\end{cases}$$



إذن : $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{3}{2x-2}$

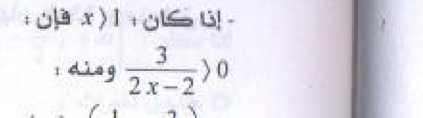
ب) $\lim\limits_{|x|\mapsto+\infty}\left[fx-\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\right]=\lim\limits_{|x|\mapsto+\infty}\frac{3}{2x-2}=0$

ومنه ينتج أن المستقيم ذو المعادلة : $(\Delta): y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ مقارب مائل للمنحني في جوار $(-\infty)$ وفي جوار $(+\infty)$

ج) دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ)

لدراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة المقدار $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)$

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2x-2}$$



- إذا كان ، $x>1$ فإن :

$\frac{3}{2x-2}>0$ ومنه ،

$f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)>0$

بالتالي المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ)

- إذا كان $x<1$ فإن : $\frac{2}{2x-2}<0$

ومنه ، $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)<0$

بالتالي المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) .

□ رسم المنحني (C_f) و (Δ)

المنحني (C_f) يقطع : (xx') في نقطتين $O(0,0)$ ، $A(-2,0)$

3) $x^2+2(1-m)x+2m=0$ تكافئ : $x^2+2x-2mx+2m=0$

تكافئ : $x^2+2x=2mn-2m$

تكافئ : $x^2+2x=2m(x-1)$

وإذا كان ، $x\neq1$ نجد ، $\frac{x^2+2x}{2(x-1)}=m$ أي : $f(x)=m$

إذن حلول المعادلة : $x^2+2(1-m)x+2m=0$......(I) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$.

- إذا كان ، $m<0$ فإن المعادلة (1) لها حلان احدهما سالب واخر موجب
- إذا كان ، $m=0$ فإن المعادلة (1) لها حلان هما 0 و -2
- إذا كان $m<0$ $f(1-\sqrt{3})>m$ فإن المعادلة (1) لهما حلان سالبان
- إذا كان، $m=f(1-\sqrt{3})$ فإن المعادلة (1) لها حل مضاعف $x=1-\sqrt{3}$.
- إذا كان، $f(1+\sqrt{3})>m>f(1-\sqrt{3})$ فإن المعادلة (1) ليس لها حلول .
- إذا كان، $m=f(1+\sqrt{3})$ فإن المعادلة (1) لها حل مضاعف ، $x=1+\sqrt{3}$
- إذا كان، $m>f(1+\sqrt{3})$ فإن المعادلة (1) لها حلان موجبان

4) - إذا كان ، $x\in]-2,0[$ فإن ، $x^2+2x<0$

- إذا كان ، $x\in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ فإن ، $x^2+2x>0$

بالتالي :

$$\begin{cases}g(x)=f(x)\ ,\ x\in]-\infty\ ,-2\ ]\cup[\ 0\ ,+\infty\ [\\ g(x)=-f(x)\ ,\ x\in[-2\ ,\ 0\ ]\end{cases}$$

ب) إذا كان $x\in]-\infty,-2]\cup[0,1[\cup]1,+\infty[$ فإن بيان الدالة g منطبق على (C_f).

- إذا كان $x\in]-2,0[$ فإن $g(x)=-f(x)$

وبالتالي بيان الدالة g هو نظير بيان الدالة f بالنسبة الى $(x\,x')$

تطبيق 19 : حل متراجحات بالاعتماد على دراسة دوال

$$x^2+4x+6<\frac{x+6}{x+1}\;......(*)$$

1) أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على IR بـ: $f(x)=x^2+5x+6$

2) ارسم المنحنى البياني (C_f) في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

3) لتكن الدالة g المعرفة على $IR-\{-1\}$ بالعبارة: $g(x)=\frac{x+6}{x+1}$

أ) أدرس تغيرات الدالة g

ب) ارسم (H) متحناها البياني في نفس المعلم السابق

4) أوجد بالحساب حلول المعادلة: $x^2+5x+6=\frac{x+6}{x+1}$

5) باستعمال الأسئلة السابقة عين حلول المتراجحة $(*)$

✓ الحل :

1) دراسة تغيرات الدالة f

- مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f=IR=]-\infty,+\infty[$
- حساب النهايات:

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty} x^2=+\infty \quad , \quad \lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty} x^2=+\infty$$

- الدالة f قابلة للاشتقاق على IR لأنها دالة كثير حدود و لدينا من اجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=2x+5$

إشارة $f'(x)$ مدونة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$\frac{-5}{2}$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+

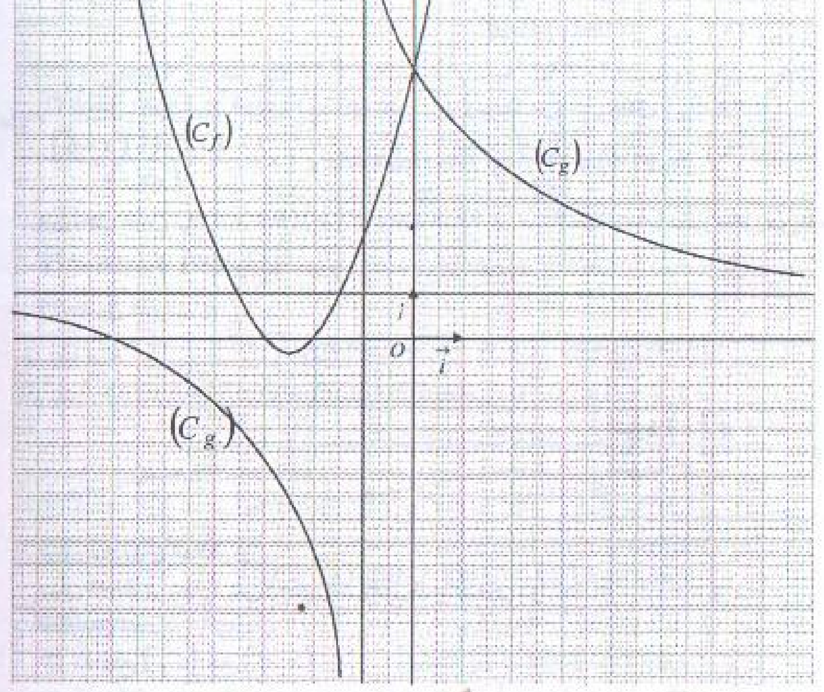
- إذا كان: $x\in\left]-\infty,-\frac{5}{2}\right]$ فإن f متناقصة تماما

إذا كان: $x\in\left[-\frac{5}{2},+\infty\right[$ فإن f متزايدة تماما

- جدول تغيرات f:

x	$-\infty$	$\frac{-5}{2}$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f	$+\infty$ ↘	$f\left(\frac{-5}{2}\right)$	↗ $+\infty$

$$f\left(-\frac{5}{2}\right)=\left(-\frac{5}{2}\right)^2+5\left(\frac{-5}{2}\right)+6=\frac{25}{4}-\frac{-25}{2}+6=\frac{25-50+24}{4}=\frac{-1}{4}$$



- تقاطع (C_f) مع محاور الاحداثيات:

- مع $(x\,x')$:

$f(x)=0$ يكافئ $x^2+5x+6=0$ يكافئ: $(x=-2)$ او $(x=-3)$

ومنه، (C_f) يقطع $(x\,x')$ في نقطتين: $A(-2,0)$ و $B(-3,0)$

مع $(y\ y')$ ؛

$x=0$ و $y=f(0)$ لكن $y=f(0)=6$ منه (C_f) يقطع $(y\ y')$ في نقطة $c(0,6)$

2) بيان الدالة f عبارة عن قطع مكافئ ذروتة $M(-2{,}5\,,-0{,}25)$

3) ا) دراسة تغيرات g ؛ $D_g=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

□ حساب النهايات ؛

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$

$\lim_{x \underset{<}{\to} -1} g(x)=-\infty$ و $\lim_{x \underset{>}{\to} -1} g(x)=+\infty$ لأن $\begin{pmatrix}\lim_{x\to-1}(x+6)=5\\ \lim_{x \underset{<}{\to} -1}(x+1)=0^-\\ \lim_{x \underset{>}{\to} -1}(x+1)=0^+\end{pmatrix}$

□ المشتق ؛ الدالة g قابلة للاشتقاق على D_g ولدينا من اجل كل ؛ $x\in D_g$ ؛ .

$g'(x)=\frac{x+1-(1)(x+6)}{(x+1)^2}$ بالتبسيط نجد ؛ $g'(x)=\frac{-5}{(x+1)^2}$

من اجل كل $x\in D_g$ ؛ $g'(x)<0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1[$ و $]-1,+\infty[$

□ جدول تغيرات g

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		-	‖	-	
تغيرات g	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

ب) رسم بيان الدالة g

بيان الدالة g عبارة عن قطع زائد يقبل المستقيمين ذوا المعادلة ، $x=-1$ و $y=1$ مقاربين له.

□ تقاطع (C_f) مع $(x\ x')$

$g(x)=0$ يكافئ ، $x+6=0$ و $x\in D_g$

يكافئ ؛ $x=-6$ ومنه ، (C_g) يقطع $(x\ x')$ في النقطة ذات الإحداثيتين $(-6,0)$

□ نقاطع (C_g) مع $(y\ y')$ ؛

$x=0$ و $y=g(0)=\frac{0+6}{0+1}=6$ ومنه؛ (C_g) يقطع $(y\ y')$ في النقطة ذات الإحداثيتين $(0,6)$

4) $x^2+5x+6=\frac{x+6}{x+1}$ ......(*)

المعادلة (*) تكافئ ؛ $(x+1)(x^2+5x+6)=x+6$ و $x\in IR-\{-1\}$

تكافئ ؛ $x^3+5x^2+6x+x^2+5x-6+6-x=0$ و $x\in IR-\{-1\}$

تكافئ ؛ $x^3+6x^2+10x=0$ و $x\in IR-\{-1\}$

تكافئ ؛ $x(x^2+6x+10)=0$ و $x\in IR-\{-1\}$

تكافئ ؛ $(x^2+6x+10)=0$ او $x=0$ و $x\in IR-\{-1\}$

مميز المعادلة $x^2+6x+10=0$ هو $\Delta=36-4(1)(10)=-4$

$\Delta<0$ ومنه المعادلة ؛ $x^2+6x+10=0$ ليس لها حلول في IR

ومنه المعادلة (*) لها حل وحيد هو ، $x=0$

5) حل المتراجحة (*) ، $x^2+5x+6<\frac{x+6}{x+1}$.....(*)

المتراجحة (*) تعني؛ $f(x)<g(x)$

وبالتالي حلول المتراجحة (*) هي فواصل النقط من (C_f) التي تقع تحت المنحني (C_g) .

من الشكل نلاحظ ان المنحني (C_f) يكون تحت (C_g) على المجال $]-1\,,0[$ وبالتالي حلول المتراجحة (*) هي؛ $]-1,0[$ اذن ؛ $S=]-1,0[$

تطبيق . 20 : الدوال والهندسة

1) لتكن الدالتين f_1 و f_2 المعرفتين بالعبارة ؛ $f_1(x)=x^2-2x+1$ و $f_2(x)=-x^2+1$ ادرس تغيرات الدالتين f_1 و f_2 ثم ارسم بيانهما (C_{f_1}) و (C_{f_2}) في نفس المعلم المتعامد والتجانس ؛ $(O,\vec{i},\vec{j})$

2) ليكن ؛ (C_{f_3}) المنحنى البياني الدالة f_3 ، نظير (C_{f_2}) بالنسبة إلى محور الفواصل .

- اوجد عبارة $f_3(x)$ بدلالة x ثم ارسم (C_{f_3}) .

3) لتكن الدالة f المعرفة ب؛ $f(x)=-x^2+x$ وليكن (C_f) منحاها البياني في معلم متعامد ومتجانس السابق

ولتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x ، مسقطها على محور الفواصل هي ؛ I ومسقطها على المستقيم ذو المعادلة $y=1$ هي J ، ولتكن الدالة g التي ترفق بكل x العدد الحقيقي الموجب ؛ $MI+MJ$

ا) اوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x

ب) ارسم (C_g) بالاستعانة بالأسئلة السابقة في معلم اخر

✓الحل :

1) □ دراسة تغيرات f_1 ؛ $D_{f_1} = IR$

$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

- الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل $x \in IR$ ؛ $f_1'(x) = 2x-2$

إشارة $f_1'(x)$ مدونة في الجدول التالي ؛

x	$-\infty$	1	$+\infty$
إشارة $f_1'(x)$	-	0	+

الدالة f_1 متزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty,1]$

□ جدول تغيرات f_1 ؛

x	$-\infty$	1	$+\infty$
إشارة $f_1'(x)$	-	0	+
تغيرات f_1	$+\infty$ ↘	$f_1(1)$	↗ $+\infty$

□ دراسة تغيرات f_2 ؛

$\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$

- الدالة f_2 قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل $x \in IR$ ؛ $f_2'(x) = -2x$

- إذا كان ؛ $x \geq 0$ فإن الدالة f_2 متناقصة تماما

وإذا كان: $x \leq 0$ فإن الدالة f_2 متزايدة تماما

□ جدول تغيرات f_2 ؛

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f_2'(x)$	+	0	-
تغيرات f_2	$-\infty$ ↗	$f_2(0)$	↘ $-\infty$

□ تعين نقط تقاطع (C_{f_1}) و (C_{f_2})

فواصل نقط تقاطع (C_{f_1}) و (C_{f_2}) هي حلول المعادلة ؛ $f_1(x) = f_2(x)$

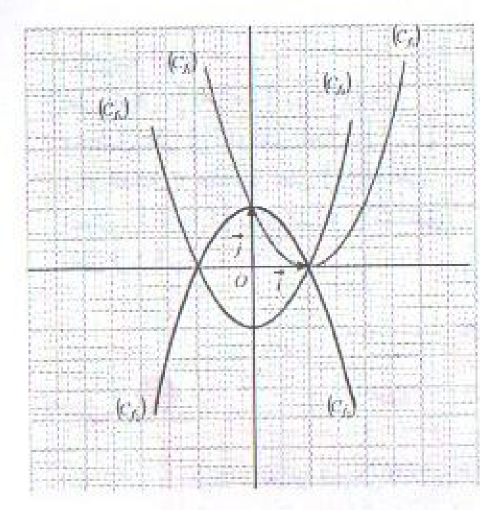
$f_1(x) = f_2(x)$ يكافئ ؛ $x^2-2x+1 = -x^2+1$

يكافئ: $2x^2-2x=0$

يكافئ ؛ $2x(x-1)=0$

يكافئ ؛ $(x=0)$ أو $(x=1)$

ومنه إحداثيات نقط تقاطع (C_{f_1}) و (C_{f_2}) هي ؛ $(0,1)$ ، $(1,0)$



2) معادلة المنحنى (C_{f_2}) هي ؛ $y=-x^2+1$

ولتكن ؛ N نقطة من (C_{f_2}) إحداثياتها (x,y) نظيرتها بالنسبة إلى محور الفواصل هي النقطة N' التي تنتمي إلى (C_{f_3}).

□ إحداثيتي النقطة N' هي ؛ $(x,-y)$

وبالتالي الدالة f_3 هي التي ترفق بكل x من IR العدد $-y$ اي: $-(-x^2+1)$

إذن ؛ $f_3(x) = -(-x^2+1) = x^2-1$

وبيانها كما هو موضح في الشكل السابق

3) $I(x\ ,\ 0)$ و $J(1, f(x))$

ا) إيجاد عبارة $g(x)$ ؛ $g(x) = MI + MJ$

$$MI = \sqrt{(x_I-x_M)^2+(y_I-y_M)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(0-f_x)^2} = |f(x)| = |-x^2+x|$$

$$MJ = \sqrt{(x_J-x_M)^2+(y_J-y_M)^2} = \sqrt{(1-x)^2+(f(x)-f(x))^2} = \sqrt{(1-x)^2} = |1-x|$$

إذن ؛ $g(x) = |1-x| + |-x^2+x|$

كتابة ؛ $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

□ إشارة $1-x$ و $-x^2+x$ مدونة في الجدول التالي ؛

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$1-x$	+		+	0	-
$-x^2+x$	-	0	+	0	-

- إذا كان ؛ $x \in]-\infty, 0]$ فإن ؛ $|1-x| = 1-x$ و $|-x^2+x| = x^2-x$

ومنه ؛ $g(x) = x^2-2x+1 = f_1(x)$.

- إذا كان ؛ $x \in [0\ ,\ 1]$ فإن ؛ $|1-x| = 1-x$ و $|-x^2+x| = -x^2+x$

ومنه $g(x) = -x^2+x+1-x = -x^2+1 = f_2(x)$

- إذا كان ؛ $x \in [1, +\infty[$ فإن ؛ $|1-x| = x-1$ و $|-x^2+x| = x^2-x$ ومنه

$g(x) = x^2-x+x-1 = x^2-1 = f_3(x)$.

إذن: $\begin{cases} g(x)=f_1(x) \ , & x \leq 0 \\ g(x)=f_2(x) \ , & 1 \geq x \geq 0 \\ g(x)=f_3(x) \ , & x \geq 1 \end{cases}$

ب) ارسم (C_g)

على المجال: $]-\infty , 0]$ بيان الدالة g منطبق على (C_{f_1}) وعلى المجال: $[0 , 1]$ بيان الدالة g منطبق على (C_{f_2}) وعلى المجال: $[1,+\infty[$ بيان الدالة g منطبق على (C_{f_3}).

تطبيق . 21 :


التعرف على معادلة بيان

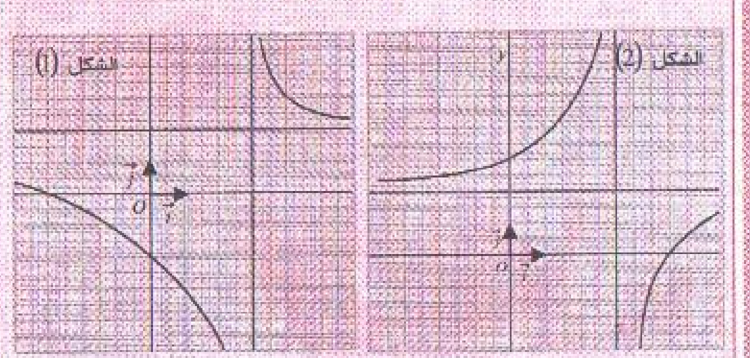
إليك المنحنيين البيانيين للدالتين f و g اللذان تقبلان المستقيمان، الذي معادلتهما $x=3$ و $y=2$ مقاربان لهما

1) بقراءة بيانية أوجد نهاية الدالتين f و g عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ وعند 3 من اليسار ومن اليمين

2) إذا علمت أن أحد المنحنيين معادلته $y=\dfrac{2x+6}{x-3}$ والثاني معادلته $y=\dfrac{-2x+9}{-x+3}$

أ) احسب: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-2x+9}{-x+3}$ و $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x+6}{x-3}$

ب) باستعمال النهايات السابقة فقط أوجد عبارة $f(x)$ و $g(x)$.



✓ الحل :

1) ◻ بالنسبة إلى الشكل (1)
- نهاية الدالة عند $-\infty$ هي 2
- نهاية الدالة عند 3 من اليسار هي $-\infty$
- نهاية الدالة عند 3 من اليمين هي $+\infty$
- نهاية الدالة عند $(+\infty)$ هي 2

◻ بالنسبة إلى الشكل (2) نهاية الدالة عند $(-\infty)$ هي 2
- نهاية الدالة عند 3 من اليسار هي $(+\infty)$
- نهاية الدالة عند 3 من اليمين هي $(-\infty)$
- نهاية الدالة عند $(+\infty)$ هي 2

2) أ)

$$\lim_{x \to 3} \frac{-2x+9}{-x+3} = -\infty \quad \text{لأن} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3} (-2x+9)=6 \\ \lim\limits_{x \to 3} (-x+3)=0^- \end{cases}$$

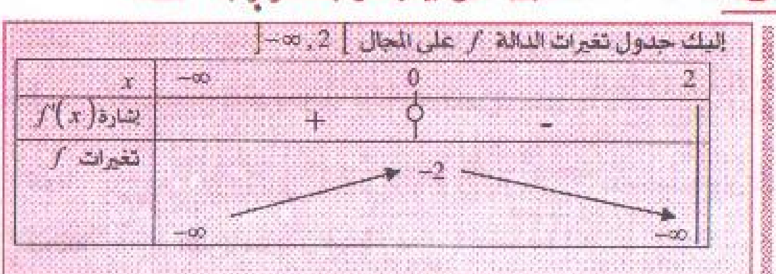
$$\lim_{x \to 3} \frac{2x+6}{x-3} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3} (2x+6)=12 \\ \lim\limits_{x \to 3} (x-3)=0^+ \end{cases}$$

ب) بما أن: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x+6}{x-3} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-2x+9}{-x+3} = -\infty$ فإن معادلة المنحني الشكل الأول هي: $y=f(x)=\dfrac{2x+6}{x+3}$ و معادلة المنحني في الشكل لثاني هي: $y=g(x)=\dfrac{-2x+9}{-x+3}$.

تطبيق . 22 :

حل بيانيا متراجحة مزدوجة

إليك جدول تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty , 2]$



x	$-\infty$		0		2
إشارة $f'(x)$		+	0	−	
تغيرات f	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$

1) انطلاقا من جدول تغيرات السابق بين أنه يوجد مستقيم مقارب عمودي لبيان الدالة f يطلب إعطاء معادلته

2) نضع: $f(x)=ax+\frac{b}{x-2}$ حيث: a و b عددين حقيقيين

أوجد العددين الحقيقيين a و b

3) بين أن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f)

4) أكمل جدول تغيرات الدالة f

5) أ) ارسم (C_f) في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

ب) حل المعادلة: $f(x)=\frac{-13}{2}$ ثم استنتج نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{-13}{2}$.

ج) حل بيانيا المتراجحة: $-2\ge f(x)\ge -\frac{13}{2}$

✓ الحل:

1) بما أن: $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x)=-\infty$ فإن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحني (C_f)

2) تعين العددين a و b

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن: $f(0)=-2$ و $f'(0)=0$

$f(0)=-2$ يكافئ: $\frac{b}{-2}=-2$ يكافئ: $b=4$

□ الدالة f قابلة للاشتقاق على $IR-\{2\}$ ولدينا من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=a-\frac{b}{(x-2)^2}$

$f'(0)=0$ يكافئ: $a-\frac{b}{4}=0$ يكافئ: $a=\frac{b}{4}$ يكافئ: $a=\frac{4}{4}=1$

إذن: $a=1$ و $b=4$ وبالتالي الدالة f معرفة بالشكل: $f(x)=x+\frac{4}{x-2}$

3) إثبات أن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ: (C_f)

$(y=x)$ مستقيم مقارب مائل لـ: (C_f) إذا وفقط إذا كان: $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-(x)=0$

لدينا: $f(x)-x=\frac{4}{x-2}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-2}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x-2}=0$ منه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة: $y=x$ مقارب مائل لـ: (C_f)

4) $f'(x)=1-\frac{4}{(x-2)^2}$ ومنه: $f'(x)=\frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2}$ أي: $f'(x)=\frac{(x-4)x}{(x-2)^2}$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $x(x-4)$ وهي مدونة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
إشارة $x(x-4)$		+	0	-	0	+	

إذا إذا كان: $x\in\,]2,4]$ فإن الدالة f متناقصة تماما

وإذا كان: $x\in[4,+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما

$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x)=\lim_{x \overset{>}{\to} 2}\left(x+\frac{4}{x-2}\right)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{x-2}\right)=+\infty$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
تغيرات f'		↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

5) ب) حل المعادلة: $f(x)=-4$

$f(x)=-4$ يكافئ $x+\frac{4}{x-2}=\frac{-13}{2}$ تكافئ: $\left(x+\frac{13}{2}\right)+\frac{4}{x-2}=0$

تكافئ: $x+\frac{13}{2}+\frac{4}{x-2}=0$ يكافئ: $\frac{2x(x-2)+13(x-2)+8}{x-2}=0$

تكافئ: $\frac{2x^2-4x+13x-26+8}{x-2}=0$

يكافئ: $\frac{2x^2+9x-18}{x-2}=0$

يكافئ: $2x^2+9x-18=0$ و $x\neq 2$

$2x^2+9x-18=0$ ، $\Delta=225$

$x_1=\frac{3}{2}$ و $x_2=-6$

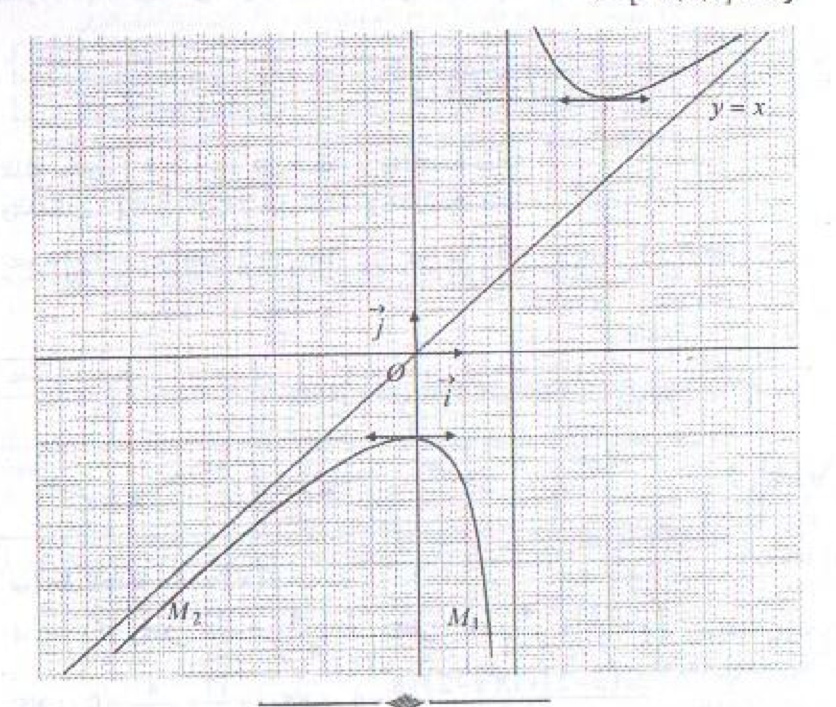
إذن المعادلة: $f(x)=\frac{-13}{2}$ لها حلين هما: $\frac{3}{2}$ و -6 وبالتالي المنحني (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{-13}{2}$ في نقطتين: $M_1\left(\frac{3}{2},\frac{-13}{2}\right)$ و $M_2\left(-6,-\frac{13}{2}\right)$

ج) حلول المتراجحة $-2\ge f(x)\ge-\frac{13}{2}$ هي فواصل نقط من منحني (C_f) التي ترتيبها

اكبر من $\frac{-13}{2}$ واقل من 2-.

من البيان نستنتج أن هذه الفواصل تنتمي إلى المجال $[-6\ ,\ 1{,}5]$

ومنه: $S=[-6\ ,\ 1{,}5]$



تطبيق . 23 : دراسة دالة كثير حدود من الدرجة الرابعة

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x)=\frac{1}{16}(x^4-10x^2+9)$ وليكن (γ) المنحنى البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة f
2) ادرس الفروع اللانهائية لـ (γ)
3) بين ان لـ (γ) نقطتين انعطاف يطلب تعينهما
4) عين نقط تقاطع المنحني (γ) مع حاملا محورا الإحداثيات
5) ارسم (γ)

الحل:

1) □ دراسة تغيرات الدالة f:

$D_f=]-\infty,+\infty[$ لأن f دالة كثير الحدود

□ حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{16}(x^4-10x^2+9)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{16}(x^4-10x^2+9)=+\infty$$

□ الدالة المشتقة الأولى:

الدالة f قابلة للاشتقاق على R لأنها دالة كثير الحدود

ولدينا: من اجل $x\in R$: $f'(x)=\frac{1}{16}(4x^3-20x)$

□ دراسة إشارة $f'(x)$:

$f'(x)=0$ يكافئ: $(4x^3-20x)=0$ يكافئ: $x^3-5x=0$

يكافئ: $x(x^2-5)=0$ يكافئ: $(x=0)$ او $(x=\sqrt5)$ أو $(x=-\sqrt5)$

x	$-\infty$		$-\sqrt5$		0		$\sqrt5$		$+\infty$
x^2-5		+	0	-		-	0	+	
x		-		-	0	+		+	
$x(x^2-5)$		-	0	+	0	-	0	+	

من الجدول أعلاه نستنتج ما يلي:

$f'(x)>0$ يكافئ: $x\in]-\sqrt5,0[\cup]\sqrt5,+\infty[$

$f'(x)<0$ يكافئ: $x\in]-\infty,-\sqrt5[\cup]0,\sqrt5[$

$f'(-\sqrt5)=f(\sqrt5)=f'(0)=0$

□ جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		$-\sqrt5$		0		$\sqrt5$		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
تغيرات f	$+\infty$	↘	$f(-\sqrt5)$	↗	$f(0)$	↘	$f(\sqrt5)$	↗	$+\infty$

$f\left(-\sqrt{5}\right)=\frac{1}{16}\left[\left(-\sqrt{5}\right)^4-10\left(-\sqrt{5}\right)^2+9\right]=\frac{1}{16}\left[25-50+9\right]=-1$

وبما أن : f زوجية فإن : $f\left(\sqrt{5}\right)=-1$

2) دراسة الفروع اللانهائية لـ (γ)

□ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ منه يوجد فرع لا نهائي ندرس منحاه

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{16}\left(x^4-10x^2+9\right)}{x}=-\infty$$

ومنه (γ) له فرع قطع مكافئ هو منحى $(y\ y')$

□ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ منه يوجد فرع لا نهائي ندرس منحاه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{16}\left(x^4-10x^2+9\right)}{x}=+\infty$$ ومنه (γ) له فرع قطع مكافئ هو منحى $(y\ y')$

3) إثبات أن لـ (γ) نقطتين انعطاف

لدينا : من أجل : $x\in R$ ، $f'(x)=\frac{1}{16}\left(4x^3-20x\right)$

ومنه : من أجل : $x\in R$ ، $f''(x)=\frac{1}{16}\left(12x^2-20x\right)$

دراسة إشارة $f''(x)$ ،

$f''(x)=0$ يكافئ : $12x^2-20x=0$

يكافئ : $x(12x-20)=0$

يكافئ : $(x=0)$ أو $\left(x=\frac{5}{3}\right)$

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
إشارة $12x^2-20x$		+	0	-	0	+	

$f''(x)$ ينعدم عند $x_0=0$ و $x_1=\frac{5}{3}$ مغيرا إشارته في جوار هما وبالتالي المنحني (γ) للدالة (f) له نقطتين انعطاف : $N_0\left(0,f(0)\right)$ ، $N_1\left(\frac{5}{3},f\left(\frac{5}{3}\right)\right)$

4) تعيين نقط تقاطع (γ) مع $(x\,x')$

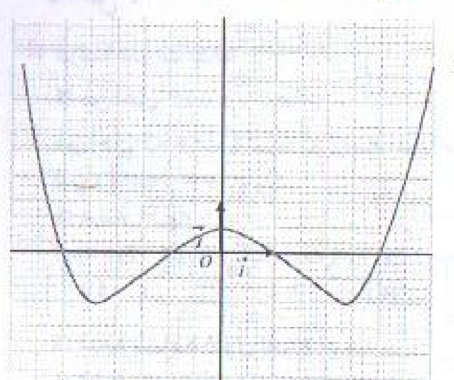
$N(x,y)\in(\gamma)\cap(x\,x')$ يكافئ : $f(x)=0$ و $x\in IR$

يكافئ : $x^4-10x^2+9=0$

$x^4-10x^2+9=0$ .....(1)

نضع : $x^2=y$ منه المعادلة (1) تصبح كما يلي : $y^2-10y+9=0$....(2)

$\Delta=10^2-4(1)(9)=100-36=64$



$\Delta>0$ ومنه المعادلة (2) لها حلين متمايزين y_1 ، y_2 حيث : $y_1=9$ ، $y_2=1$

□ **الحالة الأولى** : $y=y_1$

$y=y_1$ يكافئ : $x^2=9$

يكافئ : $(x=3)$ أو $(x=-3)$

□ **الحالة الثانية** : $y=y_2$

$y=y_2$ يكافئ : $x^2=1$

يكافئ : $(x=1)$ أو $(x=-1)$

ومنه المعادلة (1) لها أربع حلول هي :

$1\ ,3\ ,-1\ ,-3$

وبالتالي : $(\gamma)\cap(x\,x')=\{A(0\ ,1)\ ,B(0,-1)\ ,C(0\ ,3)\ ,D(0,-3)\}$

تعيين نقط تقاطع (γ) مع $(y\,y')$

$M(x,y)\in(\gamma)\cap(y\,y')$ يكافئ : $x=0$ و $y=f(0)$ يكافئ : $x=0$ و $y=\frac{9}{16}$

ومنه : $(\gamma)\cap(y\,y')=\left\{h\left(0\ ,\frac{9}{16}\right)\right\}$

تطبيق 24 : دراسة دالة ناطقة

لتكن f الدالة للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

وليكن (γ) المنحني البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أدرس تغيرات الدالة f

2) بين أن لـ (γ) ثلاث نقط انعطاف يطلب تعينها ثم أرسم (γ)

3) لتكن الدالة h للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $h(x)=\frac{2|x|}{x^2+1}$

وليكن (δ) المنحنى البياني لها في المعلم السابق

أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة h عند العدد $x_0=0$

ب) بين أن الدالة h زوجية

ج) ارسم (δ) مستعينا ببيان الدالة f

✓ الحل :

1) دراسة تغيرات الدالة f

□ من أجل $x \in IR$: $x^2 \geq 0$

من أجل $x \in IR$: $x^2+1 \geq 1$ ومنه، من أجل $x \in IR$: $x^2+1 \neq 0$

إذن: $D_f =]-\infty\ ,+\infty[$

□ حساب النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{2x}{x^2+1} = 0 \quad ، \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

□ الدالة المشتقة الأولى للدالة f:

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا، من أجل $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x\,(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2\left(-x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

□ دراسة إشارة $f(x)$: $f'(x)=0$ يكافئ: $-x^2+1=0$ يكافئ: $(x=1)$ أو $(x=-1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة $1-x^2$		-	0	+	0	-	

$f'(x) > 0$ يكافئ: $x \in]-1,\ 1[$

$f'(x) < 0$ يكافئ: $x \in]-\infty\ ,-1[\cup]1,\ +\infty[$

□ جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة $1-x^2$		-	0	+	0	-	
إشارة f	0	↘	-1	↗	1	↘	0

2) إثبات أن لـ (γ) ثلاث نقط انعطاف:

لدينا من السؤال 1) ، $f'(x) = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$

من أجل $x \in IR$ ، $f''(x) = \frac{-4x\left(x^2+1\right)^2 - 2\,(2x)\left(x^2+1\right)\left(2-2x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$

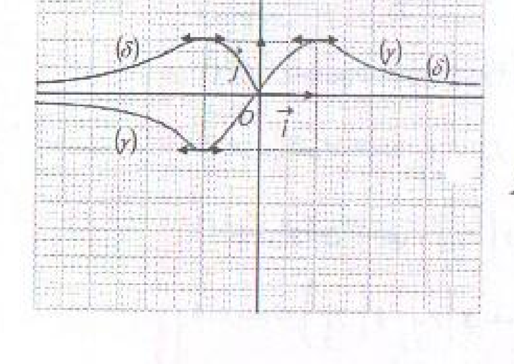
$$= \frac{-4x\left(x^2+1\right)\left[x^2+1+2-2x^2\right]}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{-4x\left(-x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$-4x$		+		+	0	-		-	
$-x^2+3$		-	0	+		+	0	-	
$f''(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

$f''(x)$ تنعدم عند $-\sqrt{3}\ ,\ 0\ ,\ \sqrt{3}$ مغيرا إشارته في جوارها وبالتالي المنحنى (γ) الممثل للدالة f له ثلاث نقط انعطاف هي: $O(0\ ,\ 0)$ ، $A\left(\sqrt{3}\ ,f\left(\sqrt{3}\right)\right)$ ، $B\left(-\sqrt{3}\ ,\ f\left(-\sqrt{3}\right)\right)$

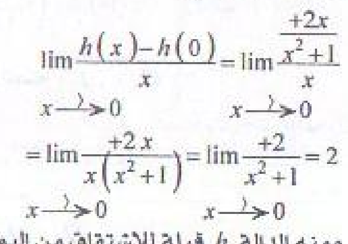
3) دراسة قابلية اشتقاق دالة h عند العدد $x_0 = 0$

$$\begin{cases} h(x) = \frac{2x}{x^2+1} & ,x \geq 0 \\ h(x) = \frac{-2x}{x^2+1} & ,x \leq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\frac{-2x}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-2x}{x\left(x^2+1\right)} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-2}{x^2+1} = -2$$

ومنه الدالة h قابلة للاشتقاق من اليسار عند العدد $x_0 = 0$



$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{+2x}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{+2x}{x\left(x^2+1\right)} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{+2}{x^2+1} = 2$$

ومنه الدالة h قبلة للاشتقاق من اليمين عند العدد $x_0 = 0$

وبما أن: $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} \neq \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{h(x)-h(0)}{x}$

فإن الدالة h غير قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0 = 0$ والمنحنى الممثل للدالة h له نصفي مماسين ميلهما: $-2, 2$ عند النقطة $O(0\ ,\ 0)$ التي تسمى نقطة زاوية

ب) إثبات أن الدالة h زوجية

h دالة زوجية يكافئ : من أجل كل $x\in R$ ، $-x\in R$ ؛ و $h(-x)=h(x)$

$$h(-x)=\frac{2|-x|}{(-x)^2+1}=\frac{2|x|}{x^2+1}=h(x)$$

ومنه h دالة زوجية.

ج) رسم (δ)

من أجل $x\in[0,+\infty[$: $h(x)=f(x)$

ومنه : (δ) منطبق على (γ)

وبما أن h دالة زوجية نتم رسم الجزء الآخر بالتناظر بالنسبة إلى $(y'y)$

تطبيق . 25 : دراسة دالة كثير حدود من الدرجة الثانية بمعاملات وسيطية

لتكن الدالة العددية f_m للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$f_m(x)=mx^2+x-m-1$ حيث m عدد حقيقي غير معدوم معطى.

وليكن : (γ_m) المنحني الممثل للدالة f_m في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$

1) بين أن جميع المنحنيات (γ_m) لها نقطتين مشتركتين M_0 ، M_1 يطلب تعينهما

2) ادرس تغيرات الدالة $f_{\frac{1}{2}}$ ، $f_{\frac{-1}{2}}$

3) ادرس الوضع النسبي لـ $(\gamma_{\frac{1}{2}})$ و $(\gamma_{\frac{-1}{2}})$

4) ارسم لـ $(\gamma_{\frac{1}{2}})$ و $(\gamma_{\frac{-1}{2}})$ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

الحل :

1) إثبات أن جميع المنحنيات لها نقطتين مشتركتين : M_0 ، M_1

(جميع المنحنيات لها نقطة مشتركة $M_0(x,y)$ إذا وفقط إذا كان :

من أجل كل $m\in IR^*$ ؛ $f_m(x)=y$

المساواة $f_m(x)=y$ تكتب على الشكل $m(x^2-1)+(x-1-y)=0$ ......(1)

بما أن المساواة (1) صحيحة من اجل كل عدد حقيقي m فهي صحيحة من اجل

$m=0$ و $m=1$ وعليه ينتج : $\begin{cases}x^2-1=0\\x-1-y=0\end{cases}$.

$\begin{cases}x^2-1=0\\x-1-y=0\end{cases}$ يكافئ ، $\begin{cases}(x=1)\ (x=-1)\\y=x-1\end{cases}$

يكافئ ، $\begin{cases}(x=1),\ (y=0)\\x=-1\ ,y=-2\end{cases}$

إذن جميع المنحنيات (γ_m) لها نقطتين مشتركتين $N_0(1,0)$ ، $N_1(-1,-2)$

2) دراسة تغيرات الدالة $f_{\frac{1}{2}}$ ، $f_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$

◻ $D_{f_{\frac{1}{2}}}=]-\infty,+\infty[$ لأن : $f_{\frac{1}{2}}$ دالة كثير الحدود

◻ حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f_{\frac{1}{2}}(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\frac{1}{2}(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}\right)=\lim\left(\frac{1}{2}x^2\right)=+\infty$$

◻ الدالة المشتقة الأولى :

الدالة $f_{\frac{1}{2}}$ قابلة للاشتقاق على R ولدينا: من أجل $x\in R$ ، $f_{\frac{1}{2}}(x)=x+1$

◻ تعيين إشارة $f_{\frac{1}{2}}(x)$:

$f_{\frac{1}{2}}(x)=0$ يكافئ : $x+1=0$ يكافئ : $x=-1$

$x>-1$ يكافئ : $f'_{\frac{1}{2}}(x)>0$

$x<-1$ يكافئ : $f_{\frac{1}{2}}(x)<0$

◻ جدول تغيرات الدالة $f_{\frac{1}{2}}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $f'_{\frac{1}{2}}(x)$		-	0	+	
تغيرات $f_{\frac{1}{2}}$	$+\infty$	↘	$f_{\frac{1}{2}}(-1)$	↗	$+\infty$

$f_{\frac{1}{2}}(-1)=\frac{1}{2}(-1)^2-1-\frac{3}{2}=-2$

□ دراسة تغيرات الدالة $f_{-\frac{1}{2}}$:

$$f_{-\frac{1}{2}}(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\left(x^2-2x+1\right)$$

$D_{f_{-\frac{1}{2}}}=]-\infty,+\infty[$ لأن $f_{-\frac{1}{2}}$ دالة كثير الحدود

□ حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f_{-\frac{1}{2}}(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{2}\left(x^2-2x+1\right)=-\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} f_{-\frac{1}{2}}(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2}\left(x^2-2x+1\right)=-\infty$$

□ الدالة المشتقة الأولى :

الدالة $f_{-\frac{1}{2}}$ قابلة للاشتقاق على R ولدينا، من أجل كل $x\in R$ ؛ $f'_{-\frac{1}{2}}(x)=-x+1$

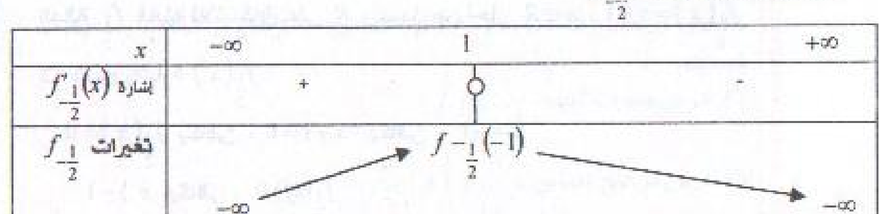
تعيين إشارة $f'_{-\frac{1}{2}}(x)$:

$f'_{-\frac{1}{2}}(x)=0$ يكافئ $-x+1=0$ يكافئ $x=1$

$x>1$ يكافئ $f'_{-\frac{1}{2}}(x)<0$

$x<1$ يكافئ $f'_{-\frac{1}{2}}(x)>0$

□ جدول تغيرات الدالة $f_{-\frac{1}{2}}$



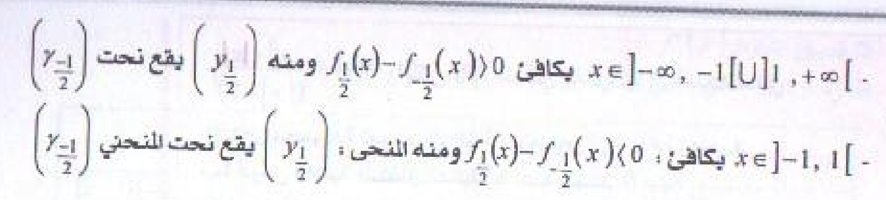
x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $f'_{-\frac{1}{2}}(x)$		+	0	-	
تغيرات $f_{-\frac{1}{2}}$	$-\infty$	↗	$f_{-\frac{1}{2}}(-1)$	↘	$-\infty$

3) دراسة الوضع النسبي لـ $(\gamma_{\frac{1}{2}})$ و $(\gamma_{-\frac{1}{2}})$

لدراسة الوضع النسبي لـ $(\gamma_{\frac{1}{2}})$ و $(\gamma_{-\frac{1}{2}})$ ندرس إشارة المقدار $f_{\frac{1}{2}}(x)-f_{-\frac{1}{2}}(x)$

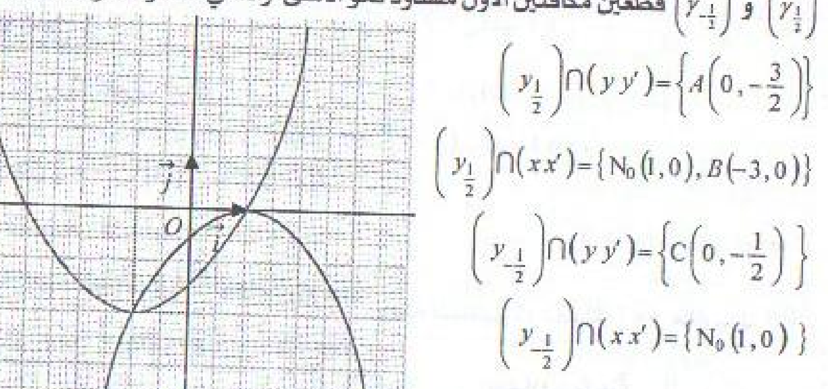
$$f_{\frac{1}{2}}(x)-f_{-\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}\right)=x^2-1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة (x^2-1)		+	0	-	0	+	



- $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ يكافئ $f_{\frac{1}{2}}(x)-f_{-\frac{1}{2}}(x)>0$ ومنه $(\gamma_{\frac{1}{2}})$ يقع تحت $(\gamma_{-\frac{1}{2}})$
- $x\in]-1,1[$ يكافئ $f_{\frac{1}{2}}(x)-f_{-\frac{1}{2}}(x)<0$ ؛ ومنه المنحى $(\gamma_{\frac{1}{2}})$ يقع تحت المنحنى $(\gamma_{-\frac{1}{2}})$

4) $(\gamma_{\frac{1}{2}})$ و $(\gamma_{-\frac{1}{2}})$ قطعين مكافئين الأول مشدود نحو الأعلى والثاني مشدود نحو الأسفل .

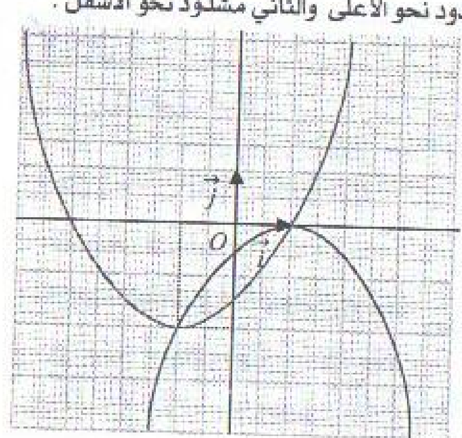


$(\gamma_{\frac{1}{2}})\cap(yy')=\left\{A\left(0,-\frac{3}{2}\right)\right\}$

$(\gamma_{\frac{1}{2}})\cap(xx')=\left\{N_0(1,0),B(-3,0)\right\}$

$(\gamma_{-\frac{1}{2}})\cap(yy')=\left\{C\left(0,-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$(\gamma_{-\frac{1}{2}})\cap(xx')=\left\{N_0(1,0)\right\}$



تطبيق . 26 : دراسة دالة ناطقة بسطها ومقامها كثير حدود من الدرجة الثانية

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$f(x)=\frac{x^2+x}{(x-1)^2}$ وليكن (γ) المنحني البياني الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$

1) أدرس تغيرات الدالة f معينا معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (γ)

2) بين أن لـ (γ) نقطة انعطاف $M_1(x_1\ y_1)$ يطلب تعيينها . ثم أكتب معادلة المماس للمنحني (γ) عند M_1 .

3) ارسم (γ) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

4) لتكن الدالة العددية h للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

وليكن (δ) المنحني الممثل لها في المعلم السابق $h(x)=\frac{x^2+|x|}{(|x|-1)^2}$

أ) عين مجموعة تعريف الدالة h ثم بين أن h دالة زوجية

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة h عند العدد $x_0=0$

ج) ارسم (δ) بيان الدالة h مستعينا بالبيان (γ)

✓ الحل :

1) □ دراسة تغيرات الدالة f :

الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $(x-1)^2\neq 0$ أي : $x\neq 1$

إذن $D_f=]-\infty,\ 1[\cup]1\ ,+\infty[$

□ حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب لـ (γ)

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=+\infty$) لأن ؛ $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}(x^2+x)=2$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}(x-1)^2=0^+$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=+\infty$) لأن ؛ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}(x^2+x)=2$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}(x-1)^2=0^+$

ومنه فإن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب لـ (γ) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب لـ (γ)

□ الدالة المشتقة الأولى:

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f لأنها دالة ناطقة ولدينا:

من أجل كل $x\in D_f$ ؛ $f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)^2-2(x-1)(x^2+x)}{(x-1)^4}$

$$=\frac{(x-1)[(2x+1)(x-1)-2x^2-2x]}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)(2x^2-2x+x-1-2x^2-2x)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)(-3x-1)}{(x-1)^4}$$

□ تعيين إشارة $f'(x)$:

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(x-1)(-3x-1)$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		1		$+\infty$
$(x-1)(-3x-1)$		-	0	+	0	-	

$f'(x)<0$ يكافئ؛ $x\in]-\infty,-\frac{1}{3}[\cup]1,+\infty[$

$f'(x)>0$ يكافئ؛ $x\in]\frac{-1}{3},1[$

$f'\left(\frac{-1}{3}\right)=0$ و $f\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{-1}{8}$

□ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$				
تغيرات f	1 ↘	$f\left(\frac{-1}{3}\right)$ ↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 1

2) إثبات أن لـ (γ) نقطة انعطاف $M_1(x_1\ y_1)$:

((γ) له نقطة انعطاف) يكافئ: ($f''(x)$ ينعدم عند x_1 مغيرا إشارته في جوار x_1)

من أجل كل $x\in D_f$ ؛ $f''(x)=\frac{-3(x-1)^3-3(x-1)^2(-3x-1)}{(x-1)^6}$

$$=\frac{-3(x-1)^2(x-1-3x-1)}{(x-1)^6}=\frac{6(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^6}=\frac{6(x+1)}{(x-1)^4}$$

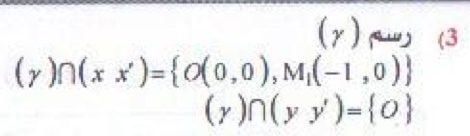
$f''(x)=0$ يكافئ؛ $(6x+1)=0$ يكافئ؛ $x=-1$

x		-1		1	$+\infty$
إشارة $f''(x)$	-	0	+	‖	+

$f''(x)$ ينعدم عند $x_1=-1$ مغيرا إشارته في جوار (-1) ومنه (γ) له نقطة انعطاف $M_1(-1,f(-1))$

$f(-1)=\frac{-1+(-1)^2}{(-1-1)^2}=\frac{0}{4}=0$ ومنه ؛ $M_1(-1,\ 0)$

□ معادلة المماس لـ (γ) عند M_1 هي ؛ $(\Delta): y=f'(-1)(x+1)+0=0$



3) رسم (γ)

$(\gamma)\cap(x\,x')=\{O(0,0), M_1(-1,0)\}$

$(\gamma)\cap(y\,y')=\{O\}$

4) أ) $h(x)=\frac{x^2+|x|}{(|x|-1)^2}$

$D_h = IR-\{-1,1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$

إثبات أن الدالة h زوجية

h زوجية يكافئ: من أجل $x\in D_h$ ، $-x\in D_h$ و $h(-x)=h(x)$

$h(-x)=\frac{(-x)^2+|-x|}{(|x|-1)^2}=\frac{x^2+|x|}{(|x|-1)^2}=h(x)$ ومنه الدالة h زوجية

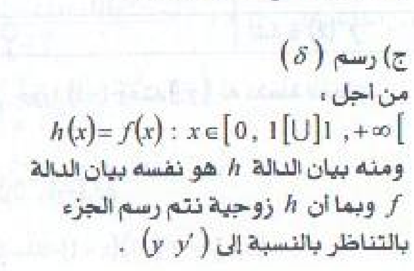
ب) دراسة قابلية اشتقاق h عند العدد $x_0=0$

$h(x_0)=h(0)=0$

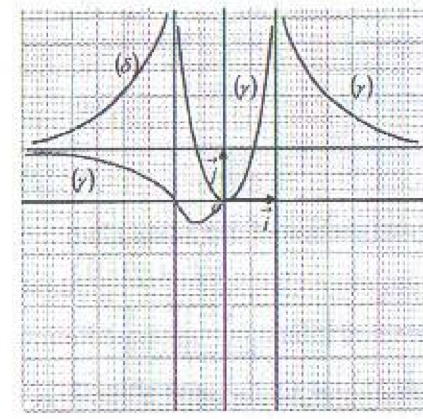
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^2+x}{x(x-1)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x+1}{(x-1)^2}=1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^2-x}{x(-x-1)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x-1}{(-x-1)^2}=-1$$

بما أن: $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{h(x)-h(0)}{x}\neq\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{h(x)-h(0)}{x}$



فإن الدالة h غير قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0=0$ والمنحني (δ) الممثل للدالة h له نصفي مماس ميلهما 1 , -1 عند النقطة $O(0,0)$ التي تسمى نقطة زاوية



ج) رسم (δ)

من أجل:

$h(x)=f(x):\ x\in[0,1[\cup]1,+\infty[$

ومنه بيان الدالة h هو نفسه بيان الدالة f وبما أن h زوجية نتم رسم الجزء بالتناظر بالنسبة إلى $(y\,y')$.

تمارين و مسائل

1 عيّن مجموعة التعريف كل من الدوال التالية ثم احسب النهايات على أطراف مجموعة التعريف:

1) $f(x)=x^3+2x-1$ ، 2) $f(x)=\frac{1-x}{3x+2}$

3) $f(x)=\frac{2x-7}{x+3}$ ، 4) $f(x)=\frac{-x^2+x+6}{x^2+5x-24}$

5) $f(x)=\frac{-x^2+2x}{3x+4}$ ، 6) $f(x)=\frac{x^2+16}{x^2-32}$

7) $f(x)=\frac{x^2+5x-3}{x|x|-1}$ ، 8) $f(x)=\frac{x+1}{x^3-8}$

2 f و g دالتين جدولي تغيراتهما كما يلي:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	3

x	$-\infty$		-2		0		5
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$g(x)$	2	↗	3	↘		↘	$-\infty$

إستعمل الجدولين السابقين لتعيين ما يلي:

1) مجموعة تعريف كل من f و g

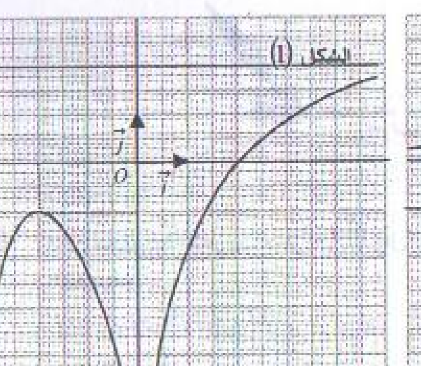
2) نهايات f و g على أطراف مجال تعريفهما

3) اتجاه تغير f و g

4) ارسم منحنى f و g

3

الشكل (2)



f و g دالتين بيانهما على التوالي الشكل (1) الشكل (2)

بالاستعانة بالتمثيلين البيانين السابقين عين ما يلي :

1) جدول تغيرات الدالتين f و g

2) معادلات المستقيمات المقاربة لـ (C_f) و (C_g)

4

- عين في كل حالة من الحالات التالية :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x)$

1) $f(x)=x^2$ ، $g(x)=-3x+5$

2) $f(x)=x^3$ ، $g(x)=x^4+x$

3) $f(x)=-x^2-1$ ، $g(x)=-x^4+x^2$

5

- عين في كل حالة من الحالات التالية :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} (f\times g)(x)$

1) $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $g(x)=x^3$

2) $f(x)=\frac{2}{3x-1}$ ، $g(x)=x^2+3$

3) $f(x)=1-\frac{2}{x}$ ، $g(x)=\frac{2x-1}{x+3}$

6

عين في كل حالة من الحالات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

1) $f(x)=x^2+2x+3$ ، $g(x)=3x-2$

2) $f(x)=2x+5$ ، $g(x)=-3x+3$

3) $f(x)=x^2-1$ ، $g(x)=x^3+2x-5$

7

عين نهاية كل دالة من الدوال التالية عند (-1) ثم $(+1)$

$f(x)=-2x^2+3x$ ، $g(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$ ، $h(x)=\frac{x+2}{|x|-1}$

$k(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ، $l(x)=\sqrt{x^2-x}$

8

أوجد النهايات لكل من الدوال التالية عند : $(+1)$

$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ ، $g(x)=-2+\frac{1}{x-1}$ ، $h(x)=1+\frac{1}{(x-1)^2}$

$k(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$ ، $l(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$

9

أوجد النهاية لكل دالة من الدوال التالية عند : $(-\infty)$ و $(+\infty)$:

$f(x)=\frac{2x+3}{-x+2}$ ، $g(x)=\frac{4x^2+2x-2}{3x^2-1}$ ، $h(x)=\frac{x^2+x}{x-3}$

$k(x)=\frac{x^3+x+1}{x^3}$ ، $l(x)=\frac{-x^3+x}{2x^2+1}$

10

ارسم التمثيل البياني للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x)=-x^2+6x-3$ ، $g(x)=\frac{1}{3}x^2-x$ ، $h(x)=4x^2-2x-2$

$k(x)=-x^2-2x-1$ ، $l(x)=-x^2+1$ ، $E(x)=x^2-2x$

ثم عين معادلة محور التناظر لبيان كل منهما .

11

في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر النقط : $A(0,2)$ ، $B(1,6)$ ، $C(-1,4)$

نسمي (C_f) المنحنى البياني للدالة f المعرفة بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ و $a\neq0$

1) عين الأعداد : a , b , c بحيث : (C_f) يشمل النقط A, B, C

2) ادرس تغيرات الدالة المحصل عليها في السؤال 1

3) ارسم (C_f) في هذه الحالة مع تحديد محور تناظره

4) أوجد معادلة (C_f) في المعلم $\left(O', \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث ؛ $O'(x_0, 0)$ حيث ؛ $f'(x)=0$

---

12 لتكن f دالة معرفة على $IR-\{1\}$ بالعبارة ؛ $f(x)=\dfrac{2x+3}{-x+2}$

وليكن ؛ (C_f) المنحني البياني

1) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة ؛ $y=-2$ مقارب للمنحني (C_f)

2) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) على كل من المجالين ؛ $]-\infty, 2[$ و $]2, +\infty[$

---

13 لتكن f دالة معرفة بالعبارة ؛ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+2}$ وليكن (C_f) المنحنى البياني لها

بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة ؛ $y=0$ مقارب للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

---

14 إليك جدول تغيرات دالة f معرفة على $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

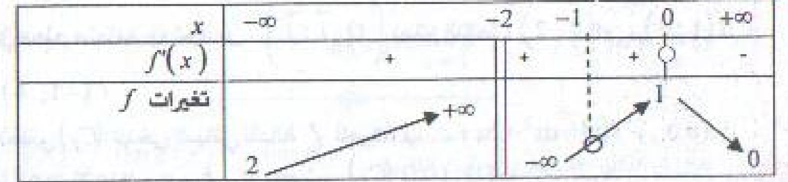
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
تغيرات f	-2 ↘	$-\infty$	‖	-2 ↘	$-\infty$

1) باستعمال الجدول السابق عين نهاية الدالة f عند أطراف مجال تعريفها

2) عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) ثم ارسم (C_f) في معلم متعامد ومتجانس ؛ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

---

15 إليك جدول تغيرات دالة f معرفة على ؛ $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$



x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
تغيرات f	2 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗		↗	1	↘	0

1) باستعمال الجدول السابق عين نهاية الدالة f عند أطراف مجال التعريف

2) عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) ثم ارسم المنحني (C_f) في معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

---

16 - لتكن الدوال التالية ؛

$$f(x)=x+2-\frac{4}{x-2}$$

$$g(x)=\frac{x^2+4}{x-2}$$

$$h(x)=x+2+\frac{x}{x^2+4}$$

$$k(x)=x+2+\frac{x}{x-2}$$

وليكن (Δ) مستقيم معادلته ؛ $y=x+2$

1) هل المستقيم (Δ) مقارب لكل منحني من المنحنيات الدوال السابقة في حالة نعم برر إجابتك

2) من اجل كل منحني من المنحنيات السابقة التي تقبل (Δ) مقارب مائل لها

ا) عين نقط تقاطع (ان وجدت) المنحني والمستقيم (Δ)

ب) ادرس وضعية كل منحني من المنحنيات السابقة بالنسبة الى (Δ)

---

17 لتكن f دالة معرفة على المجال ؛ $]-1, +\infty[$ بالعبارة التالية ؛

$$f(x)=\frac{-2x+5}{x-1}$$

1) ا) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من اجل كل x من ، $]-1, +\infty[$ ؛ $]-1$ ؛

$f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}$.

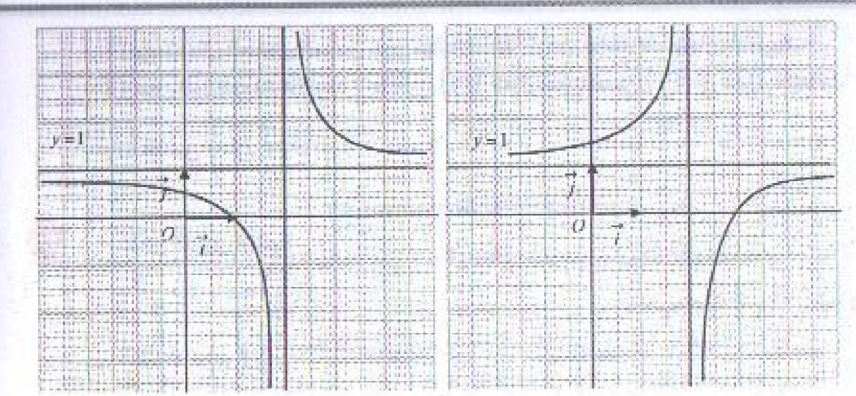
ب) برهن أن المنحني (C_f) للدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي عند $(+\infty)$ يطلب تعيين معادلته ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى هذا المستقيم على المجال $]-1, +\infty[$

2) برهن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي يطلب تعيين معادلته

3) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]-1, +\infty[$ ثم ارسم (C_f) على هذا المجال .

---

18 إليك منحنيين بيانيين لدالتين f و g نلاحظ من البيان أن المنحنيين يقبلان مستقيمان مقاربان ذوي المعادلة ؛ $x=2$ و $y=1$



1) بقراءة بيانية عين نهاية كل دالة عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ وعند 2 من اليسار ومن اليمين .

2) إذا علمت أن أحد البيانين معادلته : $y=\frac{x-3}{x-2}$ والآخر : $y=1+\frac{1}{-x+2}$

ا) احسب : $\lim_{x \xrightarrow{<} 2}\frac{x-3}{x-2}$ و $\lim_{x \xrightarrow{<} 2}\left(1+\frac{1}{-x+2}\right)$

ب) باستعمال النهايات السابقة فقط حدد عبارة $f(x)$ و $g(x)$



19 إليك المنحنى البياني لدالة f على المجال $]2,+\infty[$



1) علما أن هذا المنحني يقبل مستقيمين مقاربين معادلتهما $x=2$ و $y=3$

بقراءة بيانية عين نهاية الدالة f عند 2 من اليمين وعند $(+\infty)$

2) باستعمال النهايات عند 2 وعند $(+\infty)$ فقط

عين عبارة $f(x)$ من بين العبارات التالية :

$\frac{3x-7}{x-2}$ ، $\frac{3x^2}{x^2-4}$ ، $\frac{2x}{(x-2)^3}$

3) تحقق بالحساب أن الدالة f متناقصة تماما على المجال : $]2,+\infty[$



20 لتكن f و g دالتين معرفتين على : $IR-\{1\}$

بالعبارة التالية : $f(x)=x+3+\frac{1}{x-1}$ ، $g(x)=\frac{x^2+2x-5}{x-1}$

1) عين نهاية f و g عند $(+\infty)$

2) برهن أن (C_f) و (C_g) لهما نفس المستقيم المقارب المائل الذي يطلب تعينه

3) عين وضعية المستقيم المقارب المائل بالنسبة إلى كل منحني

21 لتكن f دالة معرفة بالعبارة التالية : $f(x)=\frac{2x^2-x}{x-1}$

1) بين انه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $ax+b+\frac{c}{x-1}$ حيث : a,b,c أعداد حقيقية يطلب تعينها

2) عين نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ ثم بين ان (C_f) له مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعينه

3) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ)

22 لتكن f دالة معرفة بالعبارة التالية : $f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{2x+1}$

وليكن (C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) تحقق أن $f(x)$ يكتب على الشكل : $x-2+\frac{3}{2x+1}$

2) أحسب نهاية f عند أطراف مجال التعريف

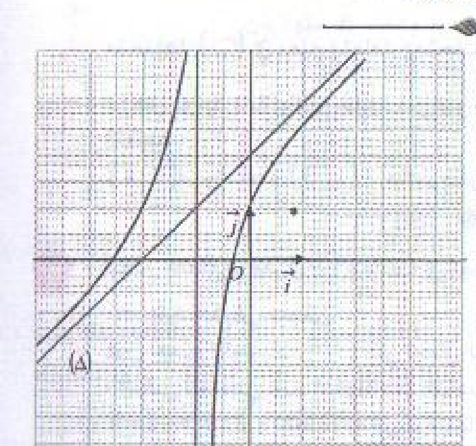
3) بين أن المستقيم ذو المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f)

4) عين معادلة المماس (d) للمنحني عند النقطة ذات الفاصلة O

5) ارسم (C_f) و (d) والمستقيم المقارب المائل .

23 لتكن f دالة عبارتها من الشكل :

$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+d}$ بيانها كما هو مبين في الشكل المجاور



1) عين a,b,d باستعمال المستقيمات المقاربة (d) و (Δ) فقط

2) عين العدد الحقيقي C باستعمال نقطة من البيان تبدوا واضحة

3) بين أن المنحني (C_f) له مماسين ميل كل منهما 2

24 لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ كما يلي :

$$g(x)=\frac{1}{\cos x}\ ،\ f(x)=\frac{1}{-1+\sin x}$$

وليكن (C_f) و (C_g) منحناهما البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ) بين ان (C_f) له مستقيم مقارب معادلته $x=\frac{\pi}{2}$

ب) بين ان (C_g) له مستقيم مقارب معادلته $x=\frac{\pi}{2}$

2) أ) أدرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها على $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$

ب) أدرس تغيرات g ثم شكل جدول تغيراتها على $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$

3) ارسم (C_f) و (C_g) في نفس المعلم السابق

---

25 هل توجد دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية بحيث منحناها البياني يمر بالنقاط : $A(0,5)$ ، $B(1,10)$ ، $C(-1,4)$ في حالة وجودها ارسم منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

---

26 1) هل توجد دالة كثير حدود من الدرجة الثانية فردية بحيث منحناها البياني يقبل مماس أفقي عند النقطة $A\left(2,\frac{-16}{3}\right)$ في حلة وجودها ادرس تغيراتها ثم ارسم منحناها (C_f) في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

2) هل توجد دالة كثير حدود من الدرجة الثانية بحيث بيانها يقبل مماس أفقي عند النقطة : $A(0,4)$ والنقطة $I(1,3)$ كمركز تناظر له ؟

---

27 لنعتبر القطع الزائد (H) معادلته في معلم معطى هي: $y=\frac{(m+1)x+2-m}{x-m}$ حيث ، m عدد حقيقي معطى

عين جميع المنحنيات (H) التي تحقق الشروط التالية

- المماس للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة $x=2$ يوازي المستقيم ذو المعادلة : $3x+y+1=0$ و نقطة التماس ترتيبها موجب

---

28 المنحنى (γ) لدالة يقبل مستقيمين (d) و (Δ) ذو المعادلة $x=-2$ و $y=3$ كمستقيمات مقاربة له

1) من بين الدوال التالية ما هي التي تحقق الشروط السابقة :

$$g(x)=\frac{x+3}{x^2-4}\qquad ، \qquad f(x)=\frac{3x+6}{x+2}$$

$$k(x)=\frac{3x^2+5}{(x+2)^2}\qquad ، \qquad h(x)=\frac{x+3}{2x+4}$$

2) من بين المنحنيات المحصل عليها ما هي تلك التي بيانها يقطع المستقيم (Δ) في نقطة فاصلتها معدومة .

---

29 f دالة معرفة على بالعبارة التالية :

$f(x)=x^3+x$ و g دالة معرفة على $IR-\{0\}$ بالعبارة التالية $g(x)=2x+\frac{12}{x}$

ونرمز بـ: (C_f) و (C_g) إلى منحناهما البياني في معلم متعامد ومتجانس : $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أدرس تغيرات f ثم أرسم (C_f)

2) أ) بين ان (C_g) له مستقيم مقارب مائل يطلب تعين معادلة له ثم حدد وضعية (C_g) بالنسبة إلى هذا المستقيم

ب) ادرس تغيرات الدالة g ثم أرسم (C_g)

3) أ) بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطتين A و B يطلب تعيين إحداثياتهما

ب) بين أن المنحنى (C_g) له مماس عند A وعند B متوازيان

---

30 f دالة معرفة على بالعبارة التالية $f(x)=\frac{2x^3-8x^2+7x-7}{(x-2)^2}$

1) ادرس تغيرات f

2) أ) بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$ax+b+\frac{c}{x-2}+\frac{d}{(x-2)^2}$ حيث : a ، b ، c ، d اعداد حقيقية .

ب) استنتج معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ) للمنحني (C_f) ثم حدد وضعيته بالنسبة إلى (C_f)

3)ارسم (Δ) و (C_f) في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

4) عين بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية : $2x^3-(8+m)x^2+(7+4m)x-7-4m=0$

31 نعتبر في IR المتراجحة $-x^2+7x-5 < \frac{5}{x-1} .....(I)$

1) أ) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=-x^2+7x-5$

ب) ارسم (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

2) ادرس تغيرات الدالة g المعرفة على $IR-\{-1\}$ بالعبارة : $g(x)=\frac{5}{x-1}$ ، ثم ارسم (C_g) في نفس المعلم السابق

3) حل المعادلة $f(x)=g(x)$

4) باستعمال المنحنيين (C_f) و (C_g) عين حلول المتراجحة (I)

32 لتكن f دالة معرفة على $IR-\{1\}$ بالعبارة التالية : $f(x)=\frac{x^2-3x}{(x-1)^2}$ وليكن (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) بين ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين A و B يطلب تعيين إحداثياتها

3) ارسم (C_f) المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) لتكن الدالة g المعرفة على $IR-\{1\}$ بالعبارة : $g(x)=\frac{2x-3}{2x-2}$ وليكن (C_g) منحناها البياني في نفس المعلم

أ) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

ب) ارسم (C_g) في نفس المعلم السابق

5) أ) عين حسب قيم m عدد حلول المعدلة $f(x)=m$ ، $m\in IR$

ب) في حالة المستقيم $(\Delta_m): y=m$ يقطع (C_f) في نقطتين M و N

أحسب بدلالة m إحداثيتي النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[MN]$

ج) بين ان النقطة I تنتمي إلى (C_g) .

الدرس 6 :

المتتاليات

1 . المتتالية

مثال

عدد سكان مدينة A في 2005 هو 1000 000 نسمة ، حسب دراسة إحصائية وجد أن عدد سكان هذه المدينة يزداد بانتظام كل سنة بقيمة 20 000 نسمة .

1) أوجد عدد سكان المدينة A في سنة 2006 .

2) أوجد عدد سكان المدية A في الخمس سنوات المقبلة (اي بعد 2006)

3) في اي سنة يكون عدد سكان المدينة A ضعف ما كان عليه في 2005 .

الحل :

1) نسمي P_x عدد سكان المدينة A في سنة $(2005+x)$ و x عدد طبيعي

عندئذ P_0 عدد سكان المدينة A في سنة 2005 اي : $P_0=100\,000$

عدد سكان المدينة A في سنة 2006 هو P_1 حيث : $P_1=P_0+20\,000+1020\,000$

2) P_6 ، P_5 ، P_4 ، P_3 ، P_2 هي عدد سكان المدينة A في السنوات : 2007 ، 2008 ، 2009 ، 2010 ، 2011 على التوالي :

$P_2=P_1+20\,000$ ، $P_3=P_2+20\,000$ ، $P_4=P_3+20\,000$

$P_5=P_4+20\,000$ ، $P_6=P_5+20\,000$

لاحظ ان يمكن ان نجد علاقة بين P_0 و P_x وهذه العلاقة هي : $p_x=p_0+20\,000\times x$

وعليه نجد : $p_2=10\,40\,000$ ، $p_3=10\,60\,000$ ، $p_4=10\,80\,000$

$p_5=1100\,000$ ، $p_6=11\,20\,000$

3) نضع : $p_x = 2000\,000$ ونبحث عن x

$p_x = 2000\,000$ تكافئ $200\,0000 = p_0 + 20000\,x$ منه $x = \frac{100\,0000}{20\,000}$ ؛ منه $x = 50$

ومنه السنة التي تصبح فيها عدد سكان المدينة A هو $2000\,000$ هي $(2005+50)$ أي 2055

1.1 تعريف :

المتتالية هي دالة حيث مجموعة تعريفها هي N أو جزء من N و نكتب : $U : N \to IR$ ، $n \to U(n)$

اصطلاحات :

- نرمز إلى صورة n بالمتتالية U بالرمز U_n بدلا من $u(n)$
- و نرمز إلى المتتالية U بالرمز (U_n) أو $(U_n)_{n\in N}$
- U_n يسمى الحد العام للمتتالية (U_n)
- الحد U_{n-1} إن وجد يسمى الحد السابق للحد U_n
- الحد U_{n+1} يسمى الحد الموالي للحد U_n
- الحدان U_n و U_{n+1} هما حدان متعاقبان لمتتالية

2.1 كيف نعرف متتالية :

نعرف متتالية بعبارة صريحة للحد ذو الرتبة n أو بدالة f ذات المتغير الطبيعي n حيث $U_n = f(n)$.

مثال

1) $U_n = \frac{2^n+1}{5}$ منه نجد :

$U_0 = \frac{2^0+1}{5} = \frac{2}{5}$ ، $U_1 = \frac{2^1+1}{5} = \frac{3}{5}$ ، $U_5 = \frac{33}{5}$

2) $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$ منه نجد ،

$U_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1$ ، $U_2 = \frac{(-1)^2}{1} = 1$ ، $U_3 = \frac{(-1)^3}{1} = -1$

3) $U_n = 2n+3$ منه نجد : $U_0 = 3$ ، $U_1 = 5$ ، $U_2 = 7$ ، $U_{10} = 23$

4) $U_n = f(n)$ حيث : f هي الدالة المعرفة بـ: $f : x \mapsto 2x^2+1$

إذا على سبيل المثال : $U_1 = f(1) = 2\times 1^2 + 1 = 3$

$U_3 = f(3) = 2\times 3^2 + 1 = 19$ ، $U_5 = f(5) = 2\times 5^2 + 1 = 51$

- بواسطة الحد الأول وعلاقة (نقول عنها تراجعية) تسمح لنا بحساب حدا من حدود هذه المتتالية اعتمادا على الحد الأسبق .

مثال

$U_0 = 2$ ومن اجل كل $n \in N$ ؛ $U_{n+1} = 2U_n + 3$

نتحصل عند ند على :

$U_1 = 2U_0 + 3 = 7$ ، $U_2 = 2U_1 + 3 = 17$ ، $U_3 = 2U_2 + 3 = 37$.

$U_4 = 2U_3 + 3 = 71$ ، $U_5 = 2U_4 + 3 = 145$

وبهذه الكيفية نحسب الحدود الأخرى في هذا المثال U_{n+1} يكتب بالشكل :

$U_{n+1} = f(U_n)$ حيث : f هي الدالة المعرفة بـ:

$f : x \mapsto 2x+3$ تدعى المساواة : $U_{n+1} = f(U_n)$ علاقة تراجعية .

ملاحظة 1

1) إذا كانت f دالة معرفة على المجال I بحيث من اجل كل : $x \in I$ يكون: $f(x) \in I$ فإننا نستطيع ان نعرف متتالية (U_n) بإعطاء قيمة الحد الأول U_0 من I وعلاقة تراجعية : $U_{n+1} = f(U_n)$.

ملاحظة 2

إن اعطاء قيمة الحد الأول وعلاقة تراجعية لا يعين دائما متتالية فمثلا (U_n) متتالية معرفة بـ: $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \frac{1}{U_n - 2}$

لاحظ ان ، $U_1 = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0}$ بالتالي ، U_1 غير معرف

تمرين تدريبي

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بحدها العام ، $U_n = \frac{5}{n+2}$

1) احسب $U_0 , U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5$

2) علم الحدود $U_0 , U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5$ على مستقيم مدرج

3) علم النقط $A_n(n , U_n)$ في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$

الحل :

1) $U_0 = \frac{5}{2} = 2{,}5$ ، $U_1 = \frac{5}{3}$ ، $U_2 = \frac{5}{4} = 1{,}25$ ، $U_3 = 1$ ، $U_4 = \frac{5}{6}$ ، $U_5 = \frac{5}{7}$

2)

3) الحد العام U_n تكتب على الشكل:
$U_n = f(n)$ حيث، f دالة معرفة كما يلي:

$$f : x \mapsto \frac{5}{x+2}$$

النقط $A_n(n, U_n)$ تنتمي إلى المنحنى البياني للدالة f ، حدود المتتالية (U_n) تقرأ على محور الترتيب (yy') .
لاحظ أن النقطة A_0 تقع على محور الترتيب كون فاصلتها معدومة .

❷ . اتجاه تغير متتالية

1.2 تعاريف :

- القول أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما يعني أن من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} > U_n$
- القول أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما يعني أن من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} < U_n$
- القول أن المتتالية (U_n) ثابتة يعني أن من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n$

ملاحظات

1) بنفس الكيفية السابقة نعرف المتتالية المتزايدة (أو المتناقصة) وذلك بتبديل المتباينة $U_{n+1} > U_n$ بالمتباينة $U_{n+1} \geq U_n$ أو $U_{n+1} < U_n$) بالمتباينة $U_{n+1} \leq U_n$
2) التعريف السابق لا يسمح لنا بالقول أن كل المتتاليات رتيبة على N
- توجد بعض المتتاليات رتيبة إبتداءا من رتبة معينة .

مثال ❶

(U_n) متباينة معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $U_n = 2n+3$
ومنه الحد U_{n+1} معرف بـ: $U_{n+1} = 2(n+1)+3 = 2n+5$
$U_{n+1} = 2n+3+2 = U_n + 2$
بما أن : $2 > 0$ فإن : $U_{n+1} > U_n$ وبالتالي المتتالية (U_n) متزايدة تماما على N

مثال ❷

المتتالية المعرفة بحدها العام $U_n = (-1)^n + 1$ ، $n \in N$ حدودها هي : 0 ,2 ,0 ,2 .....
بالتالي فهذه المتتالية ليست رتيبة يدعى هذا النوع من المتتاليات بالمتتاليات لمتناوبة

2.2 طرائق لتعيين اتجاه تغير متتالية :

- تعيين اتجاه تغير متتالية (U_n) يعتمد أساسا على إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$
فإذا كان : $U_{n+1} - U_n > 0$ فالمتتالية (U_n) متزايدة تماما .
وإذا كان : $U_{n+1} - U_n < 0$ فالمتتالية (U_n) متناقصة تماما .
وإذا كان : $U_{n+1} - U_n = 0$ فالمتتالية ثابتة .
- إذا كان : U_n و U_{n+1} موجبين تماما فإن تعيين إتجاه تغير المتتالية (U_n) يؤول إلى مقارنة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ مع 1 ، فإذا كان : $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ فإن : (U_n) متزايدة تماما وإذا كان : $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ فإن : (U_n) متناقصة تماما .

مثال ◆

1) لتكن (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة :
$U_n = n^2 - 2n + 2$
أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n)
2) ليكن ، (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $V_n = (n+1)^2$
- أدرس اتجاه تغير المتتالية (V_n)

✓الحل :

1) لتعيين إتجاه تغير المتتالية (U_n) نعين إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \left[(n+1)^2 - 2(n+1) + 2\right] - \left[n^2 - 2n + 2\right]$$
$$= \left[n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 2\right] - \left[n^2 - 2n + 2\right]$$
$$= \left(n^2 + 1\right) - \left(n^2 - 2n + 2\right) = 2n - 1$$

من أجل كل $n \geq 1$ لدينا: $2n-1 > 0$ ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما إبتداءا من الدليل 1) أي متزايدة تماما على N^*

2) بما أن $V_n = (n+1)^2$ و $V_{n+1} = (n+2)^2$ و V_n و V_{n+1} موجبين تماما فإن لتعيين إتجاه تغير المتتالية (V_n) نقارن بين $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ مع العدد 1 .

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \qquad \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

لدينا من أجل كل n من N : $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$ وبإضافة 1 إلى طرفي هذه الأخيرة نجد:
$1 < 1+\frac{1}{n+1} \leq 2$ و بتربيع حدود هذه المتتالية نجد : $1 \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2 \leq 4$ أي:

$1 < \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq 4$ مما يدل على أن المتتالية (V_n) متزايدة تماما على N

□ مبرهنة

(U_n) متتالية معرفة بـ: $U_n = f(n)$ مع f دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$

1) إذا كانت f متزايدة تماما فإن المتتالية (U_n) متزايدة تماما

2) إذا كانت f متناقصة تماما فإن المتتالية (U_n) متناقصة تماما

□ الإثبات

1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $n+1 > n$ وبما أن الدالة f متزايدة فإن: $f(n+1) > f(n)$ أي: $U_{n+1} > U_n$ مما يدل على أن: (U_n) متتالية متزايدة تماما

2) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $n+1 > n$ وبما أن الدالة f متناقصة تماما فإن: $f(n+1) < f(n)$ أي: $U_{n+1} < U_n$ مما يدل على أن: (U_n) متناقصة تماما.

◆ مثال

(U_n) متتالية معرفة كما يلي: $U_n = 2n+3$

- أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)

✓ الحل:

الحد العام U_n يكتب على الشكل: $U_n = f(n)$ مع f دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بالشكل: $f(x) = 2x+3$.

-الدالة f من الشكل $x \mapsto ax+b$ حيث: $a=2$ ، $b=3$

وبما أن: $a > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على IR وبالتالي: فهي متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ إذن المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

ملاحظة

إذا كانت المتتالية (U_n) معرفة بالعلاقة التراجعية: $U_{n+1} = f(U_n)$ فإنه ليس من الضروري أن يكون لـ f و (U_n) نفس إتجاه التغير

◆ مثال

f دالة معرفة على المجال $[0,1]$ بـ: $f(x) = x^2$

1) ا) ارسم (γ) بيان f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ثم عين نقط تقاطع (γ) مع المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x$

ب) بين انه من اجل كل $x \in]0,1[$ ، $x^2 < x < 1$

2) نعرف المتتالية (U_n) بالحد الأول: $U_0 = \frac{3}{4}$ والعلاقة التراجعية $U_{n+1} = f(U_n)$

ا) علم النقطة A من (γ) ذات الفاصلة U_0

المستقيم المار من A والموازي لـ (xx') يقطع (d) في النقطة B ، عين فاصلة النقطة B

ب) علم النقطة من (γ) ذات الفاصلة U_1.

- اوجد طريقة لتمثيل الحدود الأولى للمتتالية (U_n)

3) باستعمال متباينة السؤال 1) بين ان (U_n) متتالية متناقصة تماما ثم قارن بين إتجاه تغير f و (U_n).

✓ الحل:

1) ا) المنحني (γ) يقطع المستقيم (d) في نقطتين $O(0,0)$ و $I(1,1)$

ب) المستقيم (d) يقع تحت المستقيم ذو المعادلة $y=1$ ومنه $x < 1$ ....(1)

المنحني (γ) يقع تحت المستقيم (d) منه $x^2 < x$ ......(2)

من (1) و (2) نجد: $0 < x^2 < x < 1$

2) ا) النقطتين A و B لهما نفس الترتيب الذي هو U_1 وبما أن النقطة B تقع على المستقيم (d) فإن الفاصلة هي أيضا U_1

ب) نرسم المستقيم المار من B والموازي لـ (yy') يقطع (γ) في النقطة B'

النقطتين B و B' لهما نفس الفاصلة U_1

- نرسم (γ) بيان الدالة $f : x \mapsto x^2$ على المجال $[0,1]$ ونرسم كذلك المستقيم (d) ذو المعادلة: $y=x$ و نعلم نقطة A_0 ذات الفاصلة U_0 على محور الفواصل.

□ المستقيم المار من A_0 والموازي لـ (yy') يقطع: (γ) في A

والمستقيم المار من A والموازي لـ (xx') يقطع (d) في B

المسقط العمودي لـ B على (xx') هو U_1

المستقيم المار من $A_1(U_1, 0)$ والموازي (yy') يقطع (γ) في B'

والمستقيم المار من B' والموازي لـ (xx') يقطع (d) في النقطة C ، المسقط العمودي للنقطة C على محور الفواصل هو U_2.

وبنفس الكيفية نعلم حدود المتتالية (U_n) على محور الفواصل

3) لدينا: $0 < x^2 < x < 1$ أي أن: $0 < f(x) < x < 1$ وعليه فإن: $f(U_n) < U_n < 1$

أي: $0 < U_{n+1} < U_n < 1$.

مما يدل على أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما على N

- الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,1]$ بينما المتتالية (U_n) متناقصة تماما على N

وهذا يعني المتتالية المعرفة بالعلاقة التراجعية: $U_{n+1}=f(U_n)$ اتجاه تغيراتها ليس دوما هو نفس تغير الدالة f .

3. المتتالية الحسابية

1.3 تعريف:

القول أن المتتالية (U_n) حسابية يعني أنه يوجد عدد حقيقي r بحيث من أجل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=U_n+r$ يدعى r أساس المتتالية (U_n)

- بعبارة أخرى تكون المتتالية حسابية إذا استطعنا الانتقال من حد إلى الحد الموالي بإضافة دائما نفس العدد r

مثال

(U_n) متتالية معرفة بحدها العام $U_n=2n+3$

- اثبت أن: (U_n) متتالية حسابية

الحل:

$$U_{n+1}=2(n+1)+3=2n+5$$

لاحظ أن: $U_{n+1}-U_n=2$ و منه فإن: (U_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$.

مثال

(V_n) متتالية معرفة بحدها العام: $V_n=-\frac{1}{2}n+3$

- اثبت أن (V_n) متتالية حسابية.

الحل:

$$V_{n+1}=\frac{-1}{2}(n+1)+3=\frac{-1}{2}n+\frac{5}{2}$$

$V_{n+1}-V_n=\left(\frac{-1}{2}n+\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}n+3\right)=-\frac{1}{2}$ منه (V_n) متتالية حسابية أساسها $-\frac{1}{2}$

2.3 الوسط الحسابي:

مبرهنة

a, b, c ثلاث حدود متتابعة من متتالية.

$\frac{a+c}{2}=b$ إذا وفقط إذا كانت: a, b, c حدود من متتالية حسابية

الإثبات

1) نفرض أن: $\frac{a+c}{2}=b$ و نبين أن a, b, c حدود من متتالية حسابية

نضع: $b-a=r$ عندئذ $b=a+r$

من المساواة $\frac{a+c}{2}=b$ نجد: $c=2b-a$

$$c=2b-a=b+(b-a)=b+r$$

منه a, b, c هي فعلا حدود لمتتالية حسابية أساسها r

2) نفرض أن a, b, c حدود من متتالية حسابية أساسها r ونبين أن: $\frac{a+c}{2}=b$

لدينا من الفرض: $b=a+r$ و $c=b+r$

$$\frac{a+c}{2}=\frac{a+b+r}{2}=\frac{(a+r)+b}{2}=\frac{b+b}{2}=b$$

مثال

- اوجد ثلاث أعداد حقيقية x, y, z متتابعة من متتالية حسابية مع العلم أن:

$$x+y+z=\frac{9}{2} \quad \text{و} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{3}$$

الحل:

بما أن x, y, z حدود متتابعة من متتالية حسابية فإن: $x+z=2y$

نفرض قيمة $(x+z)$ في المساواة $x+y+z=\frac{9}{2}$ فنجد: $3y=\frac{9}{2}$ منه $y=\frac{3}{2}$

نعوض قيمة y في المساواة: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{3}$ نجد: $\frac{1}{x}=1$ ومنه $x=1$

نعوض قيمة x و y في المساواة $x+z=2y$ فنجد $z=2y-x=3-1=2$

إذن: $(x,y,z)=\left(1,\frac{3}{2},2\right)$. لاحظ أن أساس هذه المتتالية هو: $r=\frac{1}{2}$

3.3 العلاقة بين حدود متتالية حسابية:

مبرهنة 1

1) الحد العام لمتتالية حدها الأول U_0 و أساسها r هو: $U_n=U_0+n\times r$.

2) المتتالية الحسابية ذات الأساس r متزايدة تماما إذا كان $r>0$ ومتناقصة تماما إذا كان $r<0$ وثابتة إذا كان: $r=0$

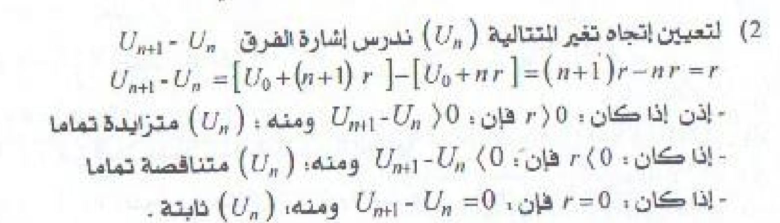
□ الإثبات

1) العبارة $U_n=U_0+nr$ محققة من أجل الحدود الأولى: $U_1=U_0+1\times r$

$U_2=U_1+r=(U_0+r)+r=U_0+2r$

$U_3=U_2+r=(U_0+2r)+r=U_0+3r$

$U_4=U_3+r=(U_0+3r)+r=U_0+4r$



نقبل أن هذه المساواة محققة من أجل كل عدد طبيعي n

2) لتعيين إتجاه تغير المتتالية (U_n) ندرس إشارة الفرق $U_{n+1}-U_n$

$U_{n+1}-U_n=[U_0+(n+1)r]-[U_0+nr]=(n+1)r-nr=r$

- إذن إذا كان: $r>0$ فإن: $U_{n+1}-U_n>0$ ومنه: (U_n) متزايدة تماما
- إذا كان: $r<0$ فإن: $U_{n+1}-U_n<0$ ومنه: (U_n) متناقصة تماما
- إذا كان: $r=0$ فإن: $U_{n+1}-U_n=0$ ومنه: (U_n) ثابتة.

مثال 1

متتالية الأعداد الزوجية ......0 ، 2 ، 4 ، 6 .... هي متتالية حسابية حدها الأول $U_0=0$ وأساسها $r=2$، وبالتالي فهي متزايدة تماما.

- حدها العام هو: $U_n=U_0+nr=2n$.

مثال 2

متتالية الأعداد الفردية 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، .... هي متتالية حسابية حدها الأول $U_0=1$ وأساسها $r=2$ فهي متزايدة تماما.

- حدها العام هو: $U_n=U_0+nr=1+2n$.

مبرهنة 2

(U_n) متتالية حسابية أساسها r.

من أجل كل عددين طبيعيين m و p: $U_m-U_p=(m-p)r$

□ الإثبات

نفرض أن U_0 هو الحد الأول للمتتالية (U_n) عندئذ الحد العام لها هو: $U_n=U_0+nr$ ومنه ينتج: $U_m=U_0+m\times r$ و $U_p=U_0+Pr$

$U_m-U_p=(U_0+mr)-(U_0+pr)=mr-pr=(m-p)r$

مثال

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول: $U_0=5$ و $U_7=15$

- أوجد عبارة الحد العام لهذه المتتالية

الحل:

بوضع: $m=7$ و $p=0$ في العلاقة: $U_m-U_p=(m-p)r$

نجد: $U_7-U_0=7r$ ومنه $r=\frac{U_7-U_0}{7}=\frac{15-5}{7}=\frac{10}{7}$

- عبارة الحد العام للمتتالية (U_n) هي: $U_n=U_0+nr$

بالتعويض نجد: $U_n=5+\frac{10}{7}n$

3.3 مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

□ ليكن S المجموع المعرف بـ: $S=U_m+U_{m+1}+......+U_P$

عدد حدود S هو: $(P-m+1)$

فمثلا عدد حدود المجموع: $U_2+U_3+....U_{15}$ هو $15-2+1$ أي: 14

1) حالة خاصة:

لنسحب مجموع n حد الأول الغير المعدومة من مجموعة الأعداد الطبيعية:

$S=1+2+3+4+.....+n$

نكتب S بترتيب تنازلي أي: $S=n+(n-1)+(n-2)+....+3+2+1$

إذن: $S=1+2+3+4+....+(n-1)+n$

$S=n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+..2+1$

بجمع طرف إلى طرف نجد:

$$2S=(n+1)+(n-1+2)+(n-2+3)+....+(2+n-1)+(1+n)$$
$$=(n+1)+(n+1)+(n+1)+...+(n+1)+(n+1)=n(n+1)$$

منه: $S=\frac{n(n+1)}{2}$

إذن مجموع n عددا طبيعيا الأولى الغير المعدومة هو: $\frac{n(n+1)}{2}$

2) الحالة العامة:

لنسحب مجموع n حدا المتعاقبة لمتتالية حسابية أساسها r

نضع p هو الحد الأول و d هو الحد الأخير

حدود هذه المتتالية تكتب على الشكل:

$p, p+r, ..., p+(n-1)r=d$

$$S'=P+(P+r)+....+[p+(n-1)r]$$
$$=np+r[1+2+...+(n-1)]$$

$$= n\,p+r\times\frac{n(n-1)}{2} = n\left[p+\frac{r(n-1)}{2}\right]$$

$$= n\,\frac{[2p+r(n-1)]}{2} = n\,\frac{[p+(p+(n-1)r)]}{2}$$

$$= \frac{n(p+d)}{2}$$

نتيجة

مجموعة حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها r وحدها الأول p وحدها الأخير d هو جداء عدد الحدود ونصف مجموع طرفي هذا المجموع

□ ترميز :

مجموع الحدود $U_1+U_2+...U_n$ يكتب على الشكل $\sum_{p=1}^{n} U_p$ وتقرا مجموع من $P=1$ إلى n للحد " U_p " فمثلا ، $1+2+3+...+n=\sum_{p=1}^{n} p=\frac{n(n+1)}{2}$.

مثال

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول : $U_0=5$ وأساسها ، $r=3$.
نضع : $S_n=U_4+U_5+....U_n$
عين n بحيث ، $S_n=3020$



الحل :

المجموع : S_n مكتوب على الشكل $U_m+.....U_p$ مع؛ $m=4$ و $p=n$ إذا يشمل ، $(n-4+1)$ حدا أي : $(n-3)$ حدا

إذن : $S_n=(n-3)\frac{(U_4+U_n)}{2}$

لكن عبارة الحد العام للمتتالية (U_n) هو: $U_n=U_0+nr$

بوضع ، $n=4$ في المساواة ، $U_n=U_0+nr$ نجد : $U_4=U_0+4r$ بالحساب نجد :

$U_4=5+4\times3=17$ و $U_n=U_0+nr=5+3n$

وعليه فإن، $S_n=\frac{(n-3)(17+5+3n)}{2}$ بعد التبسيط نجد :

$$S_n=\frac{(n-3)(22+3n)}{2}$$

$S_n=3020$ يكافئ: $\frac{(n-3)(22+3n)}{2}=3020$

يكافئ: $(n-3)(22+3n)=6040$

يكافئ: $3n^2+13n-6106=0$

$\Delta=b^2-4ac$ بالتعويض نجد ؛ $\Delta=73441$ ، $\sqrt{\Delta}=271$ ومنه المعادلة لها حلان هما :

$n_1=\frac{-13+271}{6}=\frac{258}{6}=43$ ، $n_2=\frac{-13-271}{6}\notin N$

ومنه قيمة n المطلوبة هي : 43 .

4. المتتالية الهندسية

1.4 تعريف :

القول أن المتتالية (U_n) هندسية يعني أنه يوجد عدد حقيقي q بحيث من اجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1}=qU_n$ يدعى q أساس المتتالية (U_n)

و بعبارة اخرى تكون المتتالية هندسية إذا إستطعنا الانتقال من حد إلى الحد الموالي بضرب دائما في نفس العدد q .



مثال

(U_n) متتالية معرفة بحدها العام : $U_n=2^n$. أثبت أن المتتالية (U_n) هندسية

الحل :

$U_n=2^n$ ومنه : $U_{n+1}=2^{n+1}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=2^{n+1}\times2^{-n}=2^{n+1-n}=2^1=2$$

إذن: $U_{n+1}=2U_n$ بالتالي (U_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $U_0=2^0=1$

2.4 الوسط الهندسي :

□ مبرهنة

c ، b ، a ثلاث حدود متتابعة من متتالية :

$a\times c=b^2$ إذا وفقط إذا كانت : c ، b ، a حدود من متتالية هندسية

□ الإثبات

1) نفرض أن $a\times c=b^2$ ونبين أن c ، b ، a حدود من متتالية هندسية

بوضع : $\frac{b}{a}=q$ نجد ، $b=q\times a$ و من المساواة $ac=b^2$ نجد ، $c=\frac{b^2}{a}$

إذن : $c=\frac{b^2}{a}=\frac{(q\times a)^2}{a}=\frac{q^2\times a^2}{a}=q^2a=q\times(qa)=qb$

منه : a , b , c هي فعلا حدود لمتتالية هندسية أساسها q

نفرض أن a , b , c حدود من متتالية هندسية أساسها q ونبين أن $ac = b^2$

لدينا من الفرض : $b = qa$ و $c = qb$ إذن : $ac = (aq)b = b \times b = b^2$.

مثال ◆

a , b , c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية حيث ، $abc = 64$ و

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{7}{8}$$

- أوجد الأعداد الحقيقية a , b , c

✓الحل :

بما أن : a , b , c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن : $ac = b^2$

نعوض : ac في المساواة $abc = 64$ نجد : $b^3 = 64$ ومنه : $b = 4$

إذن : $ac = b^2 = 16 .....(1)$ ، $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8} .....(2)$

من المساواة (1) نجد : $a = \frac{16}{c}$ نعوض في (2) نجد : $\frac{1}{\frac{16}{c}}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}$ بالتبسيط نجد :

المعادلة $\frac{c}{16}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}$

بعد توحيد المقامات والتبسيط نجد : $c^2-10c+16=0$

المعادلة : $c^2-10c+16=0$ لها حلين هما : $c_1 = 8$ و $c_2 = 2$.

- إذا كان : $c = 8$ فإن : $a = 2$ ومنه : $(a, b, c) = (2, 4, 8)$
- إذا كان : $c = 2$ فإن : $a = 8$ ومنه : $(a, b, c) = (8, 4, 2)$

4.3 العلاقة بين حدود متتالية هندسية :

مبرهنة 1

الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول U_0 و أساسها q هو : $U_n = U_0 \times q^n$

الإثبات

العبارة : $U_n = U_0 \times q^n$ محققة من أجل الحدود الأولى :

$$U_1 = U_0 \times q^1$$
$$U_2 = U_1 \times q = U_0 \times q \times q = U_0 \times q^2$$
$$U_3 = U_2 \times q = U_0 \times q^2 \times q = U_0 \times q^3$$
$$U_4 = U_3 \times q = U_0 \times q^3 \times q = U_0 \times q^4$$

نقبل أن هذه المساواة محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

مثال ◆

(U_n) متتالية هندسية حدها الأول : $U_0 = 5$ وأساسها $q = 2$

1) أوجد عبارة الحد العام ثم أحسب U_6

2) هل العدد 5120 حدا من حدود هذه المتتالية

✓الحل :

1) عبارة الحد العام هي : $U_n = U_0 \times q^n = 5 \times 2^n$ ومنه: $U_6 = 5 \times 2^6 = 5 \times 64 = 320$

2) $U_n = 5120$ يكافئ $5 \times 2^n = 5120$

بقسمة طرفي هذه المساواة على 5 نجد : $2^n = 1024$ لكن : $1024 = 2^{10}$

إذن من المساواة $2^n = 1024$ نجد : $n = 10$.

مبرهنة 2

إذا كانت (U_n) متتالية هندسة أساسها $q \neq 0$ فإن من أجل كل عددين طبيعيين m و p

لدينا : $U_m = q^{m-p} \times U_p$

الإثبات

نفرض أن : $U_0 \neq 0$ هو الحد الأول وعليه نجد : $U_m = U_0 \times q^m$ و $U_p = U_0 \times q^p$

$$\frac{U_m}{U_p}=\frac{U_0 \times q^m}{U_0 \times q^p}=q^m \times q^{-p}=q^{m-p}$$

إذن : $U_m = q^{m-p} \times U_p$

مثال ◆

(U_n) متتالية هندسية حدها الأول U_0 و أساسها q موجب

1) عين q إذا علمت أن : $U_4 = 48$ و $U_6 = 192$

2) عين الحد الأول U_0 ثم عبارة الحد العام U_n .

✓الحل :

1) لدينا: $U_m = q^{m-p} \times U_p ......(1)$ بوضع : $m = 6$ و $p = 4$ في المساواة (1) نجد :

$U_6 = q^{6-4} \times U_4$ بالتبسيط نجد : $U_6 = q^2 \times U_4$ منه نجد : $q^2 = \frac{U_6}{U_4} = 4$ ومنه $q = 2$ أو $q = -2$ وبما أن : $q > 0$ فإن : $q = -2$ مرفوض إذن : $q = 2$.

2) لدينا: $U_n = U_0 \times 2^n$ بوضع : $n = 4$ في هذه المساواة نجد: $U_4 = U_0 \times 2^4$ ، منه : $U_0 = \frac{U_4}{2^4}$

بالتعويض نجد : $U_0=\frac{48}{16}=3$

عبارة الحد العام للمتتالية : (U_n) هي: $U_n=3\times 2^n$

4.4 التمثيل البياني للحدود الأولى لمتتالية هندسية :

(U_n) متتالية هندسية أساسها q ، بالتعريف : $U_{n+1}=q\times U_n$

نستعمل الدالة الخطية : $f:x\mapsto qx$ من أجل الحصول على التمثيل البياني للحدود الأولى للمتتالية الهندسية (U_n) .

التمثيل البياني للدالة f هو مستقيم ميله q

-إذا كان : $q<0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=qx$ يمر من المبدأ 0 و يمر من الربع الثاني والثالث للمستوي .

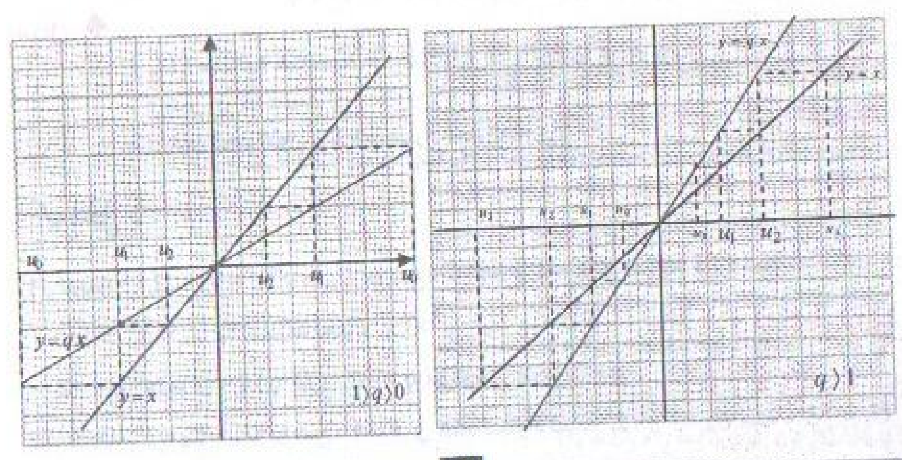
- إذا كان $0<q<1$ فإن المستقيم $y=qx$ يكون بين $d:y=x$ و $(x\ x')$

- إذا كان $q>1$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=qx$ يكون بين : $d:y=x$ و $(y\ y')$ انظر الأشكال الثلاثية .

□ حالة $q<0$

- نرسم مستقيم يمر من النقطة $A(U_0,0)$ والموازي لـ $(y\ y')$ يقطع $y=qx$ في B_1
- المستقيم المار من B_1 والموازي لـ $(x\ x')$ يقطع $y=x$ في النقطة B_2

المسقط العمودي لـ B_2 على محور الفواصل هي U_1 لأن النقطة B_2 ترتيبها نفس ترتيب B_1 الذي هو U_1 .



وبما أن B_2 من المستقيم $y=x$ فإن الفاصلة هي الترتيب

- نرسم المستقيم الذي يمثل النقطة $A_1(U_1,0)$ والذي يوازي $(y\ y')$ يقطع $y=qx$ في النقطة C_1 و المستقيم المار من C_1 والموازي لـ: $(x\ x')$ يقطع $y=x$ في النقطة C_2
- المسقط العمودي لـ C_2 على $(x\ x')$ هو U_2

لأن النقطة C_1 ترتيبها نفس ترتيب C_2 الذي هو U_2

وبما أن : C_2 من المستقيم $y=x$ فإن الفاصلة هي الترتيب

5.4 إتجاه تغير متتالية هندسية :

(U_n) متتالية هندسية حدها الأول U_0 وأساسها q حدها العام هو : $U_n=U_0\times q^n$

المتتالية (U_n) رتيبة (متزايدة او متناقصة) إذا وفقط إذا كان : $q>0$.

□ الحالة الأولى $U_0>0$

* إذا كان : $q\geq 1$ فإن المتتالية متزايدة : (ثابتة إذا كان : $q=1$)
* إذا كان : $0<q\leq 1$ فإن المتتالية متناقصة(ثابتة إذا كان $q=1$)

□ الحالة الثانية $U_0<0$

* إذا كان : $q\geq 1$ المتتالية (U_n) متناقصة (ثابتة إذا كان : $q=1$)
* إذا كان : $0<q\leq 1$ المتتالية (U_n) متزايدة (ثابتة إذا كان : $q=1$)

□ الإثبات

$U_n=U_0\times q^n$ ، $U_{n+1}=U_0\times q^{n+1}$

1) إذا كان : $q<0$ فإن حدود المتتالية (U_n) تارة موجبة وتارة سالبة (حسب قيم n) وبالتالي (U_n) ليست رتيبة .
2) إذا كان : $q>0$ اتجاه تغير المتتالية (U_n) يؤول إلى مقارنة U_n و U_{n+1}

- حالة $U_0>0$: $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{U_0\times q^{n+1}}{U_0\,q^n}=q$

إذا كان : $0<q\leq 1$ فإن : $U_{n+1}\leq U_n$ أي ان (U_n) متناقصة

وإذا كان: $q\geq 1$ فإن : $U_{n+1}\geq U_n$ أي ان : (U_n) متزايدة .

- حالة $U_0<0$: ندرس إتجاه تغير المتتالية ذات الحد العام $-U_0\,q^n$ التي اتجاه تغيرها هو عكس إتجاه تغير المتتالية (U_n) ذات لحد العام : $U_0\times q^n$

مثال

(U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان كما يلي : $U_n=-2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، $V_n=3\times 2^n$

أدرس إتجاه تغير المتتاليتين (U_n) و (V_n)

✓ الحل :

1) دراسة اتجاه تغير (U_n)

بما أن : $U_0=-2$ و $q=\frac{1}{2}$ فإن المتتالية (U_n) متزايدة تماما

2) دراسة اتجاه تغير (V_n)

بما أن $V_0=3$ و $q'=2$ فإن المتتالية (V_n) متزايدة تماما .

6.4 مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

1) حساب مجموع n حدا الأولى لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها q

الحد العام لهذه المتتالية هو: $U_n=q^n$

نضع : $S=1+q+q^2+.....q^{n-1}$ ......(1)

بضرب طرفي المساواة (1) في q نجد : $qS=q+q^2+q^3+....+q^{n-1}+q^n$ ومنه :

$qS=S-1+q^n$ و بالتالي : $qS-S=-1+q^n$ إذا $S(q-1)=q^n-1$

- إذا كان : $q\neq1$ فإن : $S=\frac{q^n-1}{q-1}$
- إذا كان : $q=1$ فإن : $S=1+1+....+1=n$

2) حساب مجموع n حدا الأولى لمتتالية هندسية حدها الأول U_0 وأساسها q

الحد العام لهذه المتتالية هو : $U_n=U_0\times q^n$.

$$S=U_0+U_1+......U_{n-1} \quad ....(2)$$

$$S=U_0+U_0q+U_0q^2......+U_0q^{n-1}$$

$$=U_0\left(1+q+q+....q^{n-1}\right)$$

- إذا كان : $q=1$ فإن : $S=U_0(1+....+1)=U_0\,n$
- إذا كان : $q\neq1$ فإن : $S=U_0\times\frac{q^n-1}{q-1}$

نتيجة

مجموع n حدا الأولى المتتابعة لمتتالية هندسية حدها الأول a أساسها q هو $a.\frac{q^n-1}{q-1}$

تمرين تدريبي

(U_n) متتالية هندسية حدها الأول $U_0=3$ وأساسها 2

1) احسب الحد السادس لهذه المتتالية ، وادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)

2) احسب مجموع S لعشرين حد الأولى .

✓ الحل :

1) الحد العام للمتتالية (U_n) هو: $U_n=U_0\times q^n$ منه : $U_n=3\times2^n$

الحد السادس للمتتالية (U_n) هو: U_5 حيث : $U_5=3\times2^5=96$

* دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) :

بما أن: $q>1$ و $U_0>0$ فإن المتتالية (U_n) متزايدة تماما

2) حساب المجموع :

$$S=U_0+U_1+.....U_{19}=U_0\times\frac{q^{19}-1}{q-1}=3\times\frac{2^{19}-1}{2-1}=3\left(2^{19}-1\right)$$

5 . تقارب متتالية

الهدف من دراسة تقارب متتالية هو معرفة كيف تصبح الأعداد U_n لما n يأخذ قيم كبيرة تقترب شيئا فشيئا من $(+\infty)$ اي هل (U_n) تأخذ قيم كبيرة ومتشتتة ام تتراكم حول قيمة معينة l .

تعريف :

نقول عن متتالية أنها متقاربة نحو العدد الحقيقي l إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يشمل كل حدود المتتالية أبتداءا من رتبة معينة ونقول عندئذ أن المتتالية متقاربة نحو l ونكتب : $\lim_{n\to+\infty}U_n=l$.

مثال

(U_n) متتالية معرفة بحدها العام : $U_n=\frac{1}{n}$

حدود هذه المتتالية هي : $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},....,\frac{1}{100},.......,\frac{1}{10000}......$

$\frac{1}{10^7},......\frac{1}{10^{50}},......\frac{1}{10^{60}},........$

نلاحظ ان حدود المتتالية (U_n) تنتهي بالتراكم حول الصفر (تقترب شيئا فشيئا من الصفر)

من اجل كل عدد حقيقي $a=10^{-k}$ حيث : k كبير جدا ، إذا كان: $n>\frac{1}{a}$

فإن كل حدود المتتالية (U_n) تنتمي إلى المجال :

$]-a\,,\,a[$ إبتداءا من الرتبة 10^{k+1}

إذن المتتالية : (U_n) متقاربة نحو العدد 0 .

10^{k} 10^{-k} 0 u_n

□ خاصية

1) إذا كانت المتتالية (U_n) متقاربة فإن نهايتها وحيدة

2) f دالة معرفة على المجال $[a, +\infty[$ و (U_n) متتالية معرفة بـ: $U_n = f(n)$ و $n \geq a$

إذا كانت، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ فإن: $\lim_{n \to +\infty} U_n = l$.

□ الإثبات:

1) نفرض أن المتتالية تقبل نهايتين مختلفتين l_1 , l_2 نختار مجالين مختلفين I و J مركزهما l_1 , l_2 على الترتيب

بما أن (U_n) متقاربة فإن ابتداء من رتبة معينة كل الأعداد U_n تنتمي إلى I و إلى J وهذا غير ممكن كون I و J منفصلين.

إذن لا يمكن أن يكون لمتتالية متقاربة نهايتين مختلفتين.

2) في هذا المستوى نقبل الخاصية بدون برهان.

مثال

1) $\lim_{n \to +\infty} \frac{a}{n} = 0$ لأن، $\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x} = 0$

2) $\lim_{n \to +\infty} \frac{a}{n^p} = 0 \, , \, p \geq 2$ لأن، $\lim \frac{a}{x^p} = 0$

3) $\lim \frac{a}{\sqrt{n}} = 0$ لأن: $\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{\sqrt{x}} = 0$

ملاحظة

كل متتالية ثابتة متقاربة نحو قيمتها الثابتة

تمرين تدريبي

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة، $U_n = 2 + \frac{1}{n+1}$

1) أ) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المستقيمان ذوي المعادلة:

$y = 2$ و $y = 2 + 10^{-1}$

ب) بين أنه يوجد عدد طبيعي k الذي من أجله كل نقط ذات الاحداثيات $A_n(n \, , \, U_n)$ مع: $n > k$ تقع بين المستقيمين السابقين ثم مثل الأعداد:

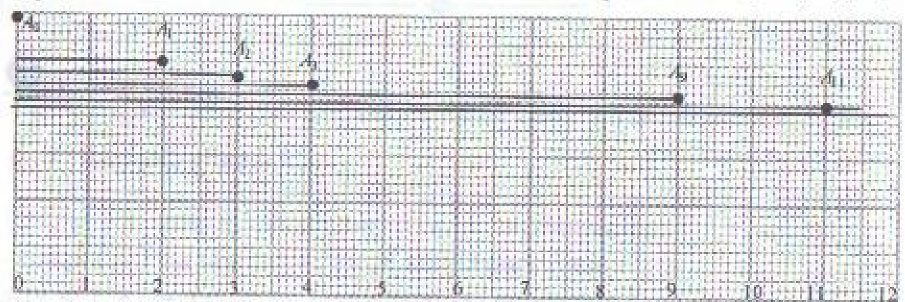
$U_0 , U_1 , U_2 , ... U_9 , U_{10} , U_{11}$

2) k عدد طبيعي كيفي بين أنه يوجد عدد طبيعي n بحيث: $2 - 10^{-k} < U_n < 2 + 10^{-k}$ استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو العدد 2

3) باستعمال دالة عددية بين طريقة ثانية أن المتتالية (U_n) تقترب من العدد 2

الحل:

1) ب) إثبات أن النقط A_n تقع بين المستقيمين: $y = 2$ و $y = 2 + 10^{-1}$



يؤول إلى إثبات أن: $2 + 10^{-1} > U_n > 2$

□ بما أن: $\frac{1}{n+1} > 0$ فإن: $U_n > 2$

□ $U_n < 2 + 10^{-1}$ يكافئ: $2 + \frac{1}{n+1} < 2 + 10^{-1}$

يكافئ: $\frac{1}{n+1} < 10^{-1}$

يكافئ: $n + 1 > 10^1$

يكافئ: $n > 9$

منه قيمة k المطلوبة هي 9

2) لدينا: $U_n = 2 + \frac{1}{n+1}$

المتباينة $U_n > 2 - 10^{-k}$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n*

إذن: $2 - 10^{-k} < U_n < 2 + 10^{-k}$ تكافئ: $U_n < 2 + 10^{-k}$

تكافئ: $2 + \frac{1}{n+1} < 2 + 10^{-k}$

تكافئ: $\frac{1}{n+1} < 10^{-k}$

تكافئ: $n + 1 > 10^k$

تكافئ: $n > 10^k - 1$

بوضع : $p=10^k-1$ كل حدود المتتالية (U_n) ابتداء من U_{p+1} تنتمي إلى المجال : $]2-10^{-k}\,,\,2+10^{-k}[$ مما يدل أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو مركز هذا المجال الذي هو 2

ونكتب : $\lim_{n\to+\infty} U_n = 2$

3) لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $]0\,,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=2+\frac{1}{x+1}$

بما أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $U_n=f(n)$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} f(n)=2$

6 . النهايات

1.6 النهايات والعمليات :

(U_n) و (V_n) متتاليتان متقاربتان نحو: l_1 و l_2 على الترتيب إذن :

- المتتالية (w_n) المعرفة بـ : $W_n=U_n+V_n$ متقاربة نحو : l_1+l_2

المتتالية : (S_n) المعرفة بـ: $S_n=U_n\times V_n$ متقاربة نحو العدد الحقيقي $l_1\,l_2$.

المتتالية $(k\,U_n)$ متقاربة نحو $k\,l_1$

- إذا كانت حدود المتتالية (V_n) غير معدومة و $l_2\neq 0$ فإن المتتالية : $l_n=\frac{U_n}{V_n}$ متقاربة نحو العدد الحقيقي $\frac{l_1}{l_2}$

أمثلة

1) $U_n=\frac{1}{n}$ و $V_n=\frac{1}{n^2}$ ، $W_n=U_n+V_n$

المتتاليتين (U_n) و (V_n) متقاربتان نحو نفس العدد 0 ومنه المتتالية (W_n) متقاربة نحو العدد 0

2) $U_n=1-\frac{1}{n}$ و $V_n=\frac{1}{n^2}$ ، $W_n=U_n+V_n$

المتتاليتين: (U_n) و (V_n) متقاربتان عند 1 , 0 على الترتيب وبالتالي المتتالية (W_n) متقاربة نحو $0+1=1$

3) $U_n=1+\frac{1}{n}$ و $V_n=2-\frac{1}{n}$ ، $W_n=\frac{U_n}{V_n}$

المتتاليتين (U_n) و (V_n) متقاربتان إلى العدد 1 و 2 على الترتيب وبالتالي المتتالية (W_n) متقاربة نحو العدد $\frac{1}{2}$

2.6 حصر متتالية :

□ مبرهنة

(U_n) و (V_n) و (W_n) ثلاث متتاليات

إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n بحيث : $n\ge n_0$ ؛

$V_n\le U_n\le W_n$ و (V_n) و (W_n) متقاربتان إلى نفس النهاية l فإن المتتالية (U_n) متقاربة نحو العدد l .

□ الإثبات

بما أن : (V_n) متقاربة نحو l فإن كل الأعداد V_n تنتمي إلى مجال مفتوح I مركزه l ابتداء من رتبة n_1

بما أن (w_n) متقاربة نحو l فإن كل الأعداد W_n تنتمي إلى مجال I إبتداء من رتبة n_2

ليكن n_3 هو أكبر العددين n_1 و n_2

كل الأعداد V_n و W_n حيث : $n\rangle n_3$ تنتمي إلى المجال I وعليه الأعداد U_n تنتمي إلى I

أي أن المتتالية : (U_n) متقاربة نحو l

مثال 1

(U_n) متتالية معرفة بحدها العام :

$U_n=\frac{n+(-1)^n}{3n}$ باستعمال المبرهنة السابقة أحسب : $\lim_{n\to+\infty}U_n$

✓ الحل :

من أجل كل n من N ، $-1\le(-1)^n\le 1$ وبإضافة n إلى حدود هذه الأخيرة نجد :

$-1+n\le(-1)^n+n\le 1+n$ وبالقسمة على $3n$ نجد : $\frac{-1+n}{3n}\le\frac{(-1)^n+n}{3n}\le\frac{1+n}{3n}$

بما أن : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+n}{3n}=\frac{1}{3}$ و $\lim\frac{-1+n}{3n}=\frac{1}{3}$ فإن : $\lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{1}{3}$

ملاحظة

إذا كانت من أجل كل عدد طبيعي n بحيث : $n\ge n_0$ ، $|U_n-l|\le V_n$ مع l عدد حقيقي ثابت و $\lim_{n\to+\infty}V_n=0$ فإن ، $\lim_{n\to+\infty}U_n=l$

مثال

(U_n) متتالية معرفة بـ : $U_n=\frac{n+2}{n}$

من اجل كل : $n\in N^*$ ، $|U_n-1|\le \frac{2}{n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0$ منه ، $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$

3.6 مقارنة بعض المتتاليات :

□ خاصية :

ليكن $a\rangle 0$ ولتكن (U_n) متتالية حسابية حدها الأول 1 وأساسها a ، حدها العام هو: $U_n=1+na$ ، ولتكن (V_n) متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $(1+a)$ ، حدها العام هو: $V_n=(1+a)^n$.

إذن من اجل n تنتمي إلى N ، $(1+a)^n\ge 1+na$ أي ان ، $V_n\ge U_n$

مثال

من اجل كل $n\in N$ ، $2^n\ge 1+n$ ، $3^n\ge 1+2n$ ، $\left(\frac{3}{2}\right)^n\ge 1+\frac{1}{2}n$

4.6 نهاية متتالية هندسية :

□ مبرهنة

(U_n) متتالية هندسية حدها الأول U_0 وأساسها $q\neq 0$

حدها العام هو: $U_n=U_0\times q^n$

1) إذا كان : $q\rangle 1$ و $U_0\neq 0$ فإن المتتالية (U_n) ليست متقاربة (متباعدة) ونهايتها $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ حسب إشارة U_0

2) إذا كان : $q=1$ فإن المتتالية (U_n) ثابتة ونهايتها U_0

3) إذا كان : $-1\langle q\langle 1$ فإن المتتالية (U_n) متقاربة نحو الصفر

4) إذا كان : $q\le -1$ فإن المتتالية (U_n) متباعدة وليست لها نهاية

□ الاثبات

1) من اجل $q\rangle 1$ نضع : $q=1+a$ مع $a\rangle 0$

من اجل كل $a\rangle 0$: $(1+a)^n\ge 1+na$ وبما ان $a\rangle 0$ ، فإن :

المتتالية ذات الحد العام : $1+na$ نهايتها $(+\infty)$

إذن المتتالية ذات الحد العام : $q^n=(1+a)^n$ نهايتها $(+\infty)$.

وبالتالي نهاية U_n هي : $(+\infty)$ إذا كان : $U_0\rangle 0$ و $(-\infty)$ إذا كان ، $U_0\langle 0$.

2) من أجل $q=1$ فإن: $U_0\,q^n=U_0$ ومنه المتتالية (U_n) متقاربة نحو العدد U_0

3) من أجل $|q|\langle 1$ نستطيع ان نكتب : $|q|=\frac{1}{1+a}$ حيث ، $a\ge 0$

إذن : $|U_0\,q_n|=|U_0|\ |q|^n$

$=|U_0|\left(\frac{1}{1+a}\right)^n=|U_0|\times\frac{1}{(1+a)^n}$

لكن من المتباينة ، $(1+a)^n\ge 1+na$ نستنتج ، $\frac{1}{(1+a)^n}\le\frac{1}{1+na}$

إذن ، $0\le|U_0\ q^n|\le|U_0|\times\frac{1}{1+na}$

و بما ان : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+na}=0$ فإن ، $\lim\limits_{n\to+\infty}U_0\,q^n=0$ اي ، $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

4) من اجل $q\le -1$

إذا كان ، n زوجي فإن ، $q^n\ge 1$ وإذا كان ، n فردي ، $q^n\le -1$

وبالتالي المتتالية ذات الحد العام ، $U_0\,q^n$ ليست لها نهاية وعليه فهي ليست متقاربة (متباعدة)

مثال

لتكن : (U_n) ، (V_n) ، (W_n) ، (S_n) اربع متتاليات معرفة كما يلي :

$U_n=2\times3^n$ ، $V_n=\left(\frac{-3}{2}\right)^n$ ، $W_n=\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ ، $S_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n$

- أحسب نهاية كل متتالية .

الحل :

1) حساب نهاية U_n

(U_n) متتالية هندسية أساسها ، $q=3$ وحدها الأول 2

بما ان ، $q\rangle 1$ و $U_0=2$ فإن ، $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$

2) حساب نهاية V_n ،

(U_n) متتالية هندسية أساسها ، $q=-\frac{3}{2}$ وحدها الأول 1

بما ان: $q\le -1$ فإن المتتالية (V_n) ليست لها نهاية

3) نهاية (W_n)

المتتالية (W_n) هندسية أساسها ، $q=-\frac{1}{2}$ وحدها الأول 1 .

بما ان ، $|q|\langle 1$ فإن ، $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n=0$

4) نهاية : (S_n)

المتتالية (S_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ وحدها الأول 1

بما ان ، $|q|\langle 1$ فإن ، $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=0$



تطبيقات نموذجية

تطبيق . 1 : ايجاد الدالة f بحيث : $U_n=f(n)$ حساب حدود متتالية

- أوجد الدالة f بحيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n=f(n)$ ثم احسب الحدود من U_0 إلى U_4 في كل حالة من الحالات التالية :

1) $U_n=3n+2$ 2) $U_n=\frac{n^2+1}{n+3}$ 3) $U_n=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 4) $U_n=n^2-3\sqrt{n}+2$

✓ الحل :

1) الدالة f المعرفة هنا هي : $f(x)=3x+2$

$U_0=2$ ، $U_1=5$ ، $U_2=8$ ، $U_3=11$ ، $U_4=14$

2) الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x^2+1}{x+3}$

$U_0=\frac{1}{3}$ ، $U_1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ، $U_2=\frac{5}{5}=1$ ، $U_3=\frac{5}{3}$ ، $U_4=\frac{17}{7}$

3) الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

$U_0=0$ ، $U_1=1$ ، $U_2=0$ ، $U_3=-1$ ، $U_4=0$

4) الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=x^2-3\sqrt{x}+2$

$U_0=2$ ، $U_1=3-3=0$ ، $U_2=6-2\sqrt{2}$ ، $U_2=11-3\sqrt{3}$ ، $U_4=12$

تطبيق . 2 : ايجاد الدالة f بحيث : $U_{n+1}=f(U_n)$ حساب حدود متتالية

(U_n) متتالية معرفة بحدها الأول U_0 و علاقة تراجعية

- أوجد الدالة f بحيث من أجل كل n من N : $U_{n+1}=f(U_n)$

ثم احسب الحدود من U_1 إلى U_3 في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\begin{cases}U_0=2\\U_{n+1}=\frac{U_n}{U_n+2}\end{cases}$ 2) $\begin{cases}U_0=-2\\U_{n+1}=(U_n-2)^2\end{cases}$ 3) $\begin{cases}U_0=3\\U_{n+1}=\sqrt{U_n+1}\end{cases}$

✓ الحل :

1) الدالة f المعرفة هنا هي الدالة التي ترفق بكل x من $]0,+\infty[$ العدد : $f(x)=\frac{x}{x+2}$

$U_1=\frac{U_0}{U_0+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ، $U_2=\frac{U_1}{U_1+2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{1}{5}$ ، $U_3=\frac{U_2}{U_2+2}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{11}{5}}=\frac{1}{11}$

2) الدالة f المعرفة هنا هي الدالة التي ترفق بكل x من $]0,+\infty[$ العدد الحقيقي : $f(x)=(x-2)^2$.

$U_1=(U_0-2)^2=(-4)^2=16$

$U_2=(U_1-2)^2=14^2=196$

$U_3=(U_2-2)^2=194^2$

3) الدالة f المعرفة هنا هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ بالعدد الحقيقي : $f(x)=\sqrt{x+1}$

$U_1=\sqrt{U_0+1}=2$ ، $U_2=\sqrt{U_1+1}=\sqrt{3}$ ، $U_3=\sqrt{U_2+1}=\sqrt{\sqrt{3}+1}$

تطبيق . 3 : التعبير عن حدود متتالية بدلالة n علم حدها العام

(U_n) متتالية معرفة : من جل كل عدد طبيعي n

عبر بدلالة n عن الحدود U_{n+1} ، U_{2n} ، U_{n-1} في كل حالة من الحالات التالية:

1) $U_n=2n^2-3n$ ، 2) $U_n=\frac{2n+2}{n+2}$ ، 3) $U_{n-3}=2-3^{n+2}$

✓ الحل :

1) $U_n=2n^2-3n$

$U_{n+1}=2(n+1)^2-3(n+1)=2(n^2+2n+1)-3n-3=2n^2+n-1$

$U_{2n}=2(2n)^2-3(2n)=2(4n^2)-6n=8n^2-6n$

$$U_{n-1} = 2(n-1)^2 - 3(n-1) = 2(n^2 - 2n + 1) - 3n + 3$$
$$= 2n^2 - 4n + 2 - 3n + 3 = 2n^2 - 7n + 5$$

(2
$$U_{n+1} = \frac{2(n+1)+2}{n+1+2} = \frac{2n+4}{n+3}$$
$$U_{2n} = \frac{2(2n)+2}{2n+2} = \frac{4n+2}{2n+2} = \frac{2n+1}{n+1}$$
$$U_{n-1} = \frac{2(n-1)+2}{n-1+2} = \frac{2n}{n+1}$$

(3
$$U_{n+1} = 2 - 3^{(n+4)+2} = 2 - 3^{n+6}$$
$$U_{n-1} = 2 - 3^{(n+2)+2} = 2 - 3^{n+4}$$
$$U_{2n} = 2 - 3^{(2n+3)+2} = 2 - 3^{2n+5}$$

تطبيق . 4 : المتتالية الدورية

(U_n) متتالية معرفة بحدها الأول : $U_0 = 2$ و $U_1 = 4$ و العلاقة التراجعية . $U_{n+2} = U_{n+1} - U_n$

1) احسب عشرة الحدود الأولى لهذه المتتالية وماذا تلاحظ

2) بين أن : U_{n+3} تكتب بدلالة U_n فقط ثم استنتج عبارة U_{n+6} بدلالة U_n

3) اوجد قيم U_{100} و U_{2006}

✓ الحل :

(1
$U_2 = U_1 - U_0 = 4 - 2 = 2$ ، $U_3 = U_2 - U_1 = 2 - 4 = -2$

$U_4 = U_3 - U_2 = -2 - 2 = -4$ ، $U_5 = U_4 - U_3 = -4 + 2 = -2$

$U_6 = U_5 - U_4 = -2 + 4 = 2$ ، $U_7 = U_6 - U_5 = 2 + 2 = 4$

$U_8 = U_7 - U_6 = 4 - 2 = 2$ ، $U_9 = U_8 - U_7 = 2 - 4 = -2$

$U_{10} = U_9 - U_8 = -2 - 2 = -4$ ، $U_{11} = U_{10} - U_9 = -4 + 2 = -2$

نلاحظ ان قيم حدود (U_n) دورية دورها $P = 6$

اي من أجل كل n من N : $U_{n+6} = U_n$

يسمى هذا النوع من المتتاليات بالمتتاليات الدورية

(2
$$U_{n+3} = U_{n+2} - U_{n+1} = (U_{n+1} - U_n) - (U_{n+1}) = -U_n$$
$$U_{n+6} = U_{(n+3)+3} = -U_{n+3} = -(-U_n) = U_n$$

(3
$U_{100} = U_{94+6} = U_{94} = ... = U_4 = -4$ (لاحظ ان : $100 = 6\times16+4$)

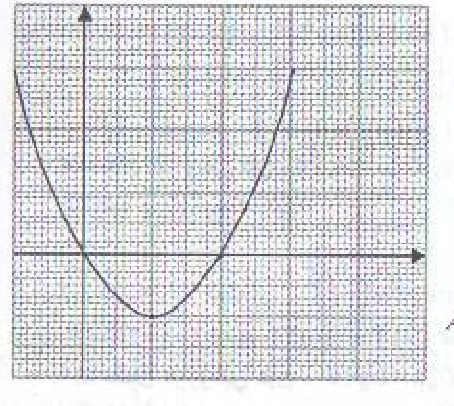
$U_{2006} = U_2 = 2$ (لاحظ أن : $2006 = 334\times6+2$)

تطبيق . 5 : التمثيل البياني للنقط ذات الإحداثيات $(n\ ,\ U_n)$

(U_n) متتالية معرفة بـ : $U_n = n^2 - 2n$

- احسب الحدود ، $U_0\ ,\ U_1\ ,\ U_2\ ,\ U_3\ ,\ U_4$ ثم مثل بيانيا هذه الحدود في معلم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ وبين ان النقط A_n ذات الإحداثيات $(n\ ,\ U_n)$ تقع على قطع مكافئ يطلب إعطاء معادلته .

✓ الحل :



$U_n = n^2 - 2n$

$U_0 = 0$ ، $U_1 = -1$

$U_2 = 0$ ، $U_3 = 3$

بما ان ، $U_n = f(n)$ حيث f ، هي الدالة المعرفة على IR بالشكل $f(x) = x^2 - 2x$

بما ان بيان أن الدالة f هو قطع مكافئ ذروته $(1, -1)$ ω فإن النقط $A_n = (n, U_n)$ تنتمي إلى هذا القطع

تطبيق . 6 : تعين اتجاه تغير متتالية

ادرس تغيرات كل متتالية من المتتاليات التالية :

1) $U_n = \dfrac{3}{n+2}$ 2) $U_n = (n-2)^2$ 3) $U_n = n - (-1)^n$

4) $Un = \cos n\pi$ 5) $U_n = \sqrt{n+1}$ 6) $\begin{cases} U_{n+1} = U_n - n \\ U_0 = 3 \end{cases}$

✓ الحل :

لدراسة تغيرات المتتالية (U_n) نحسب الفرق ، $U_{n+1} - U_n$ ثم نعين إشارته

(1
$$U_{n+1} = \frac{3}{n+1+2} = \frac{3}{n+3}$$
$$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+2} = \frac{3(n+2) - 3(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{-3}{(n+3)(n+1)}$$

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\frac{-3}{(n+3)(n+1)} < 0$

ومنه : فإنه من اجل كل n : $U_{n+1}-U_n < 0$ بالتالي : (U_n) متناقصة تماما .

2) $U_{n+1}=(n+1-2)^2=(n-1)^2$

$$U_{n+1}-U_n=(n-1)^2-(n-2)^2=[(n-1)-(n-2)][(n-1)+(n-2)]=(2n-3)$$

من اجل كل n من $N^*-\{1\}$ ؛ $2n-3>0$ ومنه : $U_{n+1}-U_n>0$ اي: $U_{n+1} < U_n$

مما يدل على ان المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $N-\{0,1\}$

3) $U_{n+1}=(n+1)-(-1)^{n+1}=(n+1)+(-1)^n$

$$U_{n+1}-U_n=[(n+1)+(-1)^n]-[n-(-1)^n]$$
$$=(n+1-n)+2(-1)^n=1+2(-1)^n$$

إذا كان n زوجي فإن : $U_{n+1}-U_n>0$ وإذا كان n فردي فإن : $U_{n+1}-U_n<0$ وبالتالي المتتالية (U_n) ليست رتيبة

4) $U_n=\cos n\pi$ نعلم ان $\cos n\pi=(-1)^n$ ومنه : $U_{n+1}=(-1)^{n+1}$

$$U_{n+1}-U_n=(-1)^{n+1}-(-1)^n=(-1)^n=(-1)^n(-1-1)=(-2)(-1)^n$$

- إذا كان n زوجي فإن : $U_{n+1}-U_n<0$ وإذا كان n فردي فإن : $U_{n+1}-U_n>0$ وبالتالي (U_n) ليست رتيبة

5) $U_n=\sqrt{n+1}$ ومنه : $U_{n+1}=\sqrt{n+2}$

$$U_{n+1}-U_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{(n+2)-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

بما أن من اجل n من N : $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}>0$ فإن : $U_{n+1}-U_n>0$

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما على N

6) $U_{n+1}-U_n=(U_n-n)-(U_n)=-n$

من اجل كل n من N^* : $U_{n+1}-U_n<0$ ومنه المتتالية (U_n) متناقصة تماما على N^*

تطبيق . 7 : دراسة اتجاه تغير متتالية بمقارنة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1

(U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $U_n=3^n+4n+1$

1) أحسب الحدود من U_0 إلى U_5 . ماذا تستطيع أن تقول عن اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

2) أدرس إشارة $\frac{U_{n+1}}{U_n}-1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

الحل :

1) $U_0=3^0+1=2$ ، $U_1=3^1+4+1=8$

$U_2=3^2+8+1=18$ ، $U_3=3^3+12+1=40$

$U_4=3^4+16+1=98$ ، $U_5=3^5+20+1=264$

نلاحظ ان حدود المتتالية (U_n) متزايدة تماما

2) $$\frac{U_{n+1}}{U_n}-1=\frac{3^{n+1}+4n+5}{3^n+4n+1}-1=\frac{3^{n+1}+4n+5-3^n-4n-1}{3^n+4n+1}$$
$$=\frac{3^{n+1}-3^n+4}{3^n+4n+1}=\frac{3^n(3-1)+4}{3^n+4n+1}=\frac{2(3^n+2)}{3^n+4n+1}$$

بما ان $3^n+2>0$ و $3^n+4n+1>0$ من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $\frac{2(3^n+2)}{3^n+4n+1}>0$

اي : $\frac{U_{n+1}}{U_n}-1>0$

- المتباينة $\frac{U_{n+1}}{U_n}-1>0$ تكافئ : $\frac{U_{n+1}}{U_n}>1$ ومنه نستنتج ان : (U_n) متتالية متزايدة تماما .

تطبيق . 8 : استنتاج اتجاه تغير متتالية حدها العام معرف بواسطة دالة

1) أدرس اتجاه تغيرات الدوال f , g , h المعرفة على IR بالعبارات :

$f(x)=2x^2+5x+4$ ، $g(x)=x^2-4x+2$ ، $h(x)=-x^2+6x+6$

2) نعرف المتتاليات (U_n) ، (V_n) ، (W_n) بالكيفية التالية :

$U_n=f(n)$ ، $V_n=g(n)$ ، $w_n=h(n)$

باستعمال السؤال الأول أدرس تغيرات كل متتالية

✓الحل :

1) ◻ الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا ، من اجل كل x من IR : $f'(x)=4x+5$

إذن إذا كان ، $x \rangle \frac{-5}{4}$ فإن f متزايدة تماما ، وإذا كان : $x \langle \frac{-5}{4}$ فإن متناقصة تماما

◻ الدالة g قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x من IR : $g'(x)=2x-4$

- إذا كان $2 \langle x$ فإن الدالة g متزايدة تماما .
- إذا كان $x \langle 2$ فإن الدالة g متناقصة تماما .

◻ الدالة h قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x من IR : $h'(x)=-2x+6$

- إذا كان ، $x \rangle 3$ فإن h متناقصة تماما
- إذا كان ، $x \langle 3$ فإن الدالة h متزايدة تماما

2) بما أن f متزايدة تماما على $\left]-\frac{5}{4},+\infty\right[$ فإنها متزايدة تماما على N وبالتالي المتتالية (U_n) حيث : $U_n=f(n)$ متزايدة تماما على N .

- بما أن الدالة g متزايدة تماما على $]2,+\infty[$ فإن المتتالية (V_n) متزايدة تماما على $N-\{0,1\}$.
- بما أن الدالة h متناقصة على المجال $]3,+\infty[$ فإن المتتالية (w_n) متناقصة تماما على $N-\{0,1,2\}$.

تطبيق - 9 : تعيين اتجاه تغير متتالية

(U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بالعبارة :

$$U_n=\frac{(\sqrt{3})^n}{n^2}$$

1) أحسب الحدود من U_1 إلى U_7 ماذا تستطيع أن تقول حول اتجاه تغير المتتالية (U_n)

2) أدرس تغيرات المتتالية (U_n)

✓الحل :

1) $U_1=\sqrt{3}$ ، $U_2=\frac{3}{4}$ ، $U_3=\frac{\sqrt3}{9}$ ، $U_4=\frac{9}{16}$ ، $U_5=\frac{9\sqrt3}{25}$ ، $U_6=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$ ، $U_7=\frac{27\sqrt3}{49}$

نلاحظ أن ابتداء من U_4 فإن : $U_7 \rangle U_6 \rangle U_5 \rangle U_4$

2) $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(\sqrt3)^{n+1}}{(n+1)^2}\times\frac{n^2}{(\sqrt3)^n}=\sqrt3\times\frac{n^2}{(n+1)^2}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\times\sqrt3=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2\times\sqrt3$

من اجل كل $n\geq4$ لدينا : $n+1\geq5$ منه : $\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{5}$ منه ينتج ، $\frac{-1}{n+1}\geq-\frac{1}{5}$ بإضافة 1 إلى طرفي هذه المتباينة نجد : $1-\frac{1}{n+1}\geq\frac{4}{5}$ بالتربيع نجد ، $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2\geq\frac{16}{25}$ وبضرب طرفي المتباينة في $\sqrt3$ نجد : $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2\times\sqrt3\geq\frac{16\sqrt3}{25}$ وبما أن ، $\frac{16\sqrt3}{25}\rangle 1$

فإن : $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2\times\sqrt3\rangle 1$ أي $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ مما يدل على أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما إبتداء من $n=4$.

تطبيق - 10 : إيجاد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية علم مجموعها ومجموع مربعاتها

أوجد ثلاث أعداد a , b , c متتابعة من متتالية حسابية بحيث:

$a+b+c=15$ ، $a^2+b^2+c^2=83$

✓الحل :

$$\begin{cases}a+b+c=15\ ....(1)\\a^2+b^2+c^2=83\ ....(2)\end{cases}$$

بما أن a , b , c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية فإن :(3)........ $a+c=2b$

من (1) و (3) نجد : $3b=15$ ومنه : $b=5$

نعوض قيمة b في المعادلتين (1) و (2) نجد $\begin{cases}a+c=10\\a^2+c^2=58\end{cases}$

$a+c=10$ تكافئ : $a=10-c$

نعوض عبارة a في المساواة ، $a^2+c^2=58$ نجد : $(10-c)^2+c^2=58$

وبالتبسيط نجد ، $2c^2-20c+42=0$ بالقسمة على 2 نجد : $c^2-10c+21=0$ ....(*)

ليكن : Δ مميز المعادلة (*) : $\Delta=(-10)^2-4(1)(21)=16$

$\Delta\rangle 0$ ومنه المعادلة (*) لها حلين مختلفين هما : c_1 , c_2

حيث : $c_1=\frac{10+4}{2}=7$ و $c_2=\frac{10-4}{2}=3$

- إذا كان : $c=7$ فإن $a=3$ ومنه : $(a,b,c)=(3,5,7)$
- إذا كان : $c=3$ فإن $a=7$ ومنه : $(a,b,c)=(7,5,3)$

تطبيق . 11 : التعرف على متتالية حسابية

من اجل كل متتالية ،
(U_n) ، (V_n) ، (W_n) المعرفة ادناه
- ما هي التي تمثل متتالية حسابية ثم عين حدها الأول والأساس ،
$U_n=-2n+5$ ، $V_n=n^2+1$ ، $W_n=3^{n-1}$

✓ الحل :

1) $U_n=-2n+5$ ، $U_{n+1}=-2(n+1)+5=-2n+3$
(U_n) حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث : $U_{n+1}-U_n=r$
$U_{n+1}-U_n=(-2n+3)-(-2n+5)=-2n+3+2n-5=-2$
إذن (U_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ وحدها الأول : $U_0=-2\times0+5=5$

2) $V_n=n^2+1$ ، $V_{n+1}=(n+1)^2+1=n^2+2n+2$
$V_{n+1}-V_n=n^2+2n+2-(n^2+1)=2n+1$
بما ان : $V_{n+1}-V_n$ ليس ثابت فإن المتتالية (V_n) ليست حسابية

3) $W_n=3^{n-1}$ ، $W_{n+1}=3^{n+1-1}=3^n$ ، $W_{n+1}-W_n=3^n-3^{n-1}=3^{n-1}(3-1)=2\times3^{n-1}$
بما أن الفرق : $w_{n+1}-w_n$ متعلق بـ: n (ليس ثابت) فإن : (W_n) ليست حسابية .

تطبيق . 12 : طبيعة المتتالية ذات الحد العام U_n-3V_n حيث (U_n) و (V_n) حسابيتان

(U_n) متتالية حسابية أساسها 5 وحدها الأول $U_1=3$ و (V_n) متتالية حسابية أساسها -5 وحدها الأول $V_1=7$
- اثبت ان المتتالية (W_n) المعرفة بـ: $W_n=U_n-3V_n$ حسابية ثم احسب الحد الأول W_1 والحد الثامن .

✓ الحل :

بما ان (U_n) متتالية حسابية فإن عبارة الحد العام لها هو: $U_n=3+5(n-1)$ ، $n\in N^*$
بما ان (V_n) متتالية حسابية فإن عبارة الحد العام لها هو: $V_n=7+(n-1)(-5)$ اي:
$V_n=-5n+12$ ، $n\in N^*$

□ إثبات ان (W_n) متتالية حسابية :
من اجل كل $n\in N^*$: $W_{n+1}=U_{n+1}-3V_{n+1}$
$=(U_n+5)-3(V_n-5)$
$=U_n-3V_n+(5+15)=W_n+20$
ومنه ، (W_n) متتالية حسابية أساسها 20 وحدها الأول $W_1=U_1-3V_1=3-21=-18$

□ تعيين الحد الثامن :
الحد الثامن هو W_8 ؛ $W_8=W_1+7\times20=-18+140=122$.

تطبيق . 13 : تعيين عدد حدود متتالية حسابية حدودها محصورة بين قيمتين معلومتين

لتكن (U_n) متتالية حسابية حدها الأول $U_0=2$ وحدها الثاني $U_1=5$
1) احسب قيمة الحد الثالث عشر
2) إبتداءا من اي رتبة U_n يكون اكبر تماما من 700
3) من اجل اي قيم لـ n يكون U_n محصورة بين 200 و 300

✓ الحل :

1) أساس المتتالية (U_n) هو : $r=U_1-U_0=3$
عبارة الحد العام للمتتالية (U_n) هو: $U_n=U_0+nr$
بالتعويض ، U_0 و r نجد : $U_n=2+3n$
الحد الثالث عشر هو : U_{12} حيث ، $U_{12}=2+3\times12=2+36+38$

2) $U_n>700$ يكافئ : $2+3n>700$ يكافئ : $3n>698$
يكافئ : $n>\frac{698}{3}$ يكافئ : $n>232,66$
إذن ابتداء من الرتبة 233 يكون : U_n اكبر تماما من 700 .

3) $200<U_n<300$ يكافئ : $200<2+3n<300$ يكافئ : $189<3n<298$
يكافئ : $\frac{198}{3}<n<\frac{298}{3}$ يكافئ : $66<n<99,3$
ومنه مجموعة قيم n بحيث : U_n يكون محصور بين 200 و 300
هي 67 ، 68 ، 69 ، .... ، 98

تطبيق 14: تعيين طبيعة المتتاليتين $\frac{1}{3}U_n+2$ و $2U_n+5V_n$ حيث (U_n) حسابية

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $U_0=-2$

1) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $V_n=\frac{1}{3}U_n+2$

بين أن (V_n) متتالية حسابية

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $t_n=2U_n+5V_n$

بين أن (V_n) متتالية حسابية ثم احسب حدها الأول t_0

✓ الحل:

1) بما أن: (U_n) متتالية حسابية أساسها 3 فإن: $U_{n+1}=U_n+3$

(V_n) متتالية حسابية أساسها r' إذا وفقط إذا كان: $V_{n+1}-V_n=r'$

$$V_{n+1}-V_n=\left(\frac{1}{3}U_{n+1}+2\right)-\left(\frac{1}{3}U_n+2\right)=\frac{1}{3}(U_{n+1}-U_n)=\frac{1}{3}r=\frac{1}{3}\times 3=1$$

إذن: (V_n) متتالية حسابية أساسها $r'=1$ وحدها الأول: $V_0=\frac{1}{3}U_0+2=\frac{4}{3}$

2) (t_n) متتالية حسابية أساسها r'' إذا وفقط إذا كان: $t_{n+1}-t_n=r''$

$$t_{n+1}-t_n=(2U_{n+1}+5V_{n+1})-(2U_n+5V_n)$$
$$=2(U_{n+1}-U_n)+5(V_{n+1}-V_n)=2r+5r'=6+5=11$$

إذن (t_n) متتالية حسابية أساسها $r''=11$ وحدها الأول $t_0=\frac{8}{3}$

تطبيق 15: تعيين طبيعة المتتالية $\frac{1}{U_n}+2$ حيث (U_n) متتالية تراجعية

لتكن (U_n) متتالية معرفة بالحد الأول: $U_0=\frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=\frac{U_n}{1+2U_n}$ والمتتالية (V_n) المعرفة بـ: $V_n=\frac{1}{U_n}+2$

1) بين أن (V_n) متتالية حسابية ثم احسب حدها الأول V_0

2) اوجد عبارة V_n ثم U_n بدلالة n

3) احسب نهاية (V_n) و (U_n) لما n يؤول إلى $(+\infty)$

✓ الحل:

1) (V_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث: $V_{n+1}-V_n=r$

$$V_{n+1}-V_n=\left(\frac{1}{U_{n+1}}+2\right)-\left(\frac{1}{U_n}+2\right)=\frac{1}{U_{n+1}}-\frac{1}{U_n}$$
$$=\frac{1+2U_n}{U_n}-\frac{1}{U_n}=\frac{1+2U_n-1}{U_n}=\frac{2U_n}{U_n}=2$$

إذن: (V_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $V_0=\frac{1}{U_0}+2=4+2=6$

2) $V_n=V_0+n\times r$: $V_n=6+2n$, $n\in N$

لدينا: $V_n=\frac{1}{U_n}+2$ ومنه: $\frac{1}{U_n}=V_n-2$ بقلب الطرفين نجد: $U_n=\frac{1}{V_n-2}$

وبالتالي: $U_n=\frac{1}{2n+6-2}=\frac{1}{2n+4}$

$$\lim_{n\to+\infty}V_n=\lim_{n\to+\infty}(6+2n)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+4}=0$$

تطبيق 16: حساب حدود متتالية هندسية بمعرفة الحد الأول والأساس أو حدين

(U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0

1) احسب الحدود: U_1, U_2, U_3, U_4 إذا علمت أن: $U_0=2$ و $q=5$

2) احسب الحدود U_1, U_2, U_3, U_4 إذا علمت أن: $U_0=-2$ و $q=-\frac{1}{2}$

3) احسب: U_0 و U_9 إذا علمت أن: $U_4=48$ و $U_7=-384$ و $q<0$

✓ الحل:

1) عبارة الحد العام هي: $U_n=U_0\times q^n$

بالتعويض قيمة U_0 و q نجد: $U_n=2\times 5^n$

$U_1=2\times 5^1=10$ ، $U_2=2\times 5^2=50$

$U_3=2\times 5^3=250$ ، $U_4=2\times 5^4=1250$

2) الحد العام للمتتالية (U_n) هو: $U_n=U_0\times q^n$ بالتعويض قيمة U_0 و q نجد:

$U_n=-2\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ ومنه نجد : $U_1=-2\left(\frac{-1}{2}\right)^1=1$ ، $U_2=-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2=\frac{-1}{2}$

$U_3=-2\left(\frac{-1}{2}\right)^3=\frac{+1}{4}$ ، $U_4=-2\left(\frac{-1}{2}\right)^4=\frac{-1}{8}$

3) لدينا من اجل كل n و p من N : $U_n=U_p\times q^{n-p}$.....(I)

بوضع : $n=7$ و $p=4$ في (I) نجد : $U_7=U_4\times q^{7-4}$

اي : $-384=48\times q^3$ ومنه : $q^3=-\frac{384}{48}=-8$

$q^3=-8$ يكافئ : $q=-2$

بوضع: $p=0$ و $n=4$ في المساواة (1) نجد : $U_4=U_0\times q^4$ ومنه : $U_0=\frac{U_4}{q^4}$

بالتعويض قيمة U_4 و q نجد : $U_0=\frac{48}{(-2)^4}=\frac{48}{16}=3$

- بوضع $p=7$ و $n=9$ في المساواة (1) نجد : $U_9=U_7\times q^2$

$U_9=(-384)\times(-2)^2=-384\times4-1536$.

تطبيق . 17 : إيجاد أساس متتالية هندسية بمعرفة علاقة بين حدودها

1) (U_n) متتالية هندسية بحيث من اجل كل عدد طبيعي n :
$U_{n+2}=U_n+U_{n+1}$ وحدودها غير معدومة واساسها q موجب، اوجد q

2) (V_n) متتالية هندسية ليست ثابتة بحيث : $V_0=3$ و $V_2=3V_1-2V_0$
ا) اوجد اساس هذه المتتالية
ب) اوجد عبارة V_n بدلالة n ثم احسب : V_1 ، V_2 ، V_3

✓ الحل :

1) الحد العام لمتتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0 هو: $U_n=U_0\times q^n$ ومنه ينتج ،
$U_{n+1}=U_0\times q^{n+1}$ و $U_{n+2}=U_0\times q^{n+2}$

من المساواة : $U_{n+2}=U_{n+1}+U_n$ ينتج : $U_0\times q^{n+2}=U_0\times q^{n+1}+U_0 q^n$ بقسمة طرفي هذه الأخيرة على: $U_0 q^n$ نجد : $q^2=q+1$

اي : $q^2-q-1=0$......(1)

ليكن Δ مميز المعادلة (1) : $\Delta=(-1)^2-4(1)(-1)=5$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة (1) لها حلين هما :

$q_1=\frac{1+\sqrt5}{2}$ ، $q_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$ وبما ان : $q>0$ فإن : $q=q_1=\frac{1+\sqrt5}{2}$

2) الحد العام للمتتالية (V_n) هو $V_n=V_0\times q^n=3\times q^n$

ومنه ينتج : $V_1=3\times q$ و $V_2=3\times q^2$

بالتعويض V_1 و V_2 و V_0 في المساواة : $V_2=3V_1-2V_0$ نجد : $3q^2=9q-6$ وبالقسمة على 3 نجد : $q^2=3q-2$ اي : $q^2-3q+2=0$........(2) .

ليكن Δ مميز المعادلة (2) : $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=1$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة (2) لها حلين هما

$q_1=\frac{3-1}{2}=2$ ، $q_2=\frac{3-1}{2}=1$

وبما ان (V_n) ليست ثابتة فإن : q_2 مرفوض وبالتالي $q=q_1=2$

ب) عبارة الحد العام للمتتالية (V_n) هو : $V_n=V_0 q^n=3\times2^n$

$V_1=3\times2^1=6$ ، $V_2=3\times2^2=12$ ، $V_3=3\times2^3=24$

تطبيق . 18 : الحد العام لمتتالية هندسية — الوسط الهندسي

(U_n) متتالية هندسية حدودها سالبة ومتزايدة
1) ما هو المجال الذي ينتمي اليه q
2) ا) عين U_1 ، U_2 ، U_3 علما ان : $U_1U_3=\frac{4}{81}$ و $U_1+U_2+U_3=\frac{-26}{27}$
ب) اوجد عبارة U_n بدلالة n

✓ الحل :

1) الحد العام للمتتالية (U_n) هو: $U_n=U_0\times q^n$ و بما ان حدودها سالبة فإن : $U_0<0$

لدينا : $U_{n+1}-U_n=U_0 q^n(q-1)$

(U_n) متزايدة يعني ان : $U_0 q^n(q-1)>0$ وبما ان $U_0<0$ فإن : $q^n(q-1)<0$

حتى يكون : $q^n(q-1)<0$ يجب ان يكون : $0<q<1$

2) ا) بما ان : U_1 ، U_2 ، U_3 حدود متتابعة من متتالية هندسية

فإن : $U_1U_3=U_2^2$

لكن : $U_1U_3=\frac{4}{81}$ إذن : $U_2^2=\frac{4}{81}$ وبالتالي: $U_2=\frac{2}{9}$ او $U_2=\frac{-2}{9}$

بما أن حدود المتتالية سالبة فإن؛ $U_2=\frac{2}{9}$ مرفوض و $U_2=-\frac{2}{9}$ مقبول

نعوض U_2 في المساواة؛ $U_1+U_2+U_3=\frac{-26}{27}$ نجد؛ $U_1+U_3=\frac{-20}{27}$

إذن، $\begin{cases} U_1U_3=\frac{4}{81} \\ U_1+U_3=\frac{-20}{27} \end{cases}$.....(1)

(1) تكافئ؛ $\begin{cases} U_1\left(\frac{-20}{27}-U_1\right)=\frac{4}{81} \\ U_1+U_3=\frac{-20}{27} \end{cases}$ تكافئ؛ $\begin{cases} U_1^2-\frac{20}{27}U_1-\frac{4}{81}=0 \\ U_3=-U_1+\frac{-20}{27} \end{cases}$

تكافئ؛ $\begin{cases} 81U_1^2+60U_1+4=0 \\ U_3=-U_1+\frac{-20}{27} \end{cases}$

$81U_1^2+60U_1+4=0$......(1)

ليكن Δ' مميز المعدلة (1)، $\Delta'=(30)^2-(81)(4)=900-324=576$

$U_1=\frac{-30+24}{81}=\frac{-6}{81}=\frac{-2}{27}$ ، $U'_1=\frac{-30-24}{81}=\frac{-54}{81}=\frac{-6}{9}=\frac{-2}{3}$

وبما أن (U_n) متزايدة تماما فإن، $U_1=\frac{-2}{27}$ مرفوض و $U_1=\frac{-2}{3}$ مقبول

نعوض U_1 في المساواة؛ $U_3=-U_1-\frac{20}{27}$ نجد ؛ $U_3=-\frac{2}{27}$.

ب) كتابة U_n بدلالة n

لدينا ، $U_2=qU_1$ ومنه ، $q=\frac{U_2}{U_1}=\frac{\frac{-2}{9}}{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3}$

إذن، $U_n=U_1\times q^{n-1}=-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

تطبيق - 19 : المتتالية هندسية — اتجاه تغير متتالية — حساب النهايات

(U_n) متتالية معرفة بـ: $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\frac{1}{3}U_n+\frac{1}{3} \end{cases}$ و (V_n)

معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة؛ $V_n=U_n-\frac{1}{2}$

1) مثل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 على المستقيم العددي بدون حساب الحدود ثم ماذا يمكن استنتاجه عن تغيرات المتتالية (U_n)

2) بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول V_0

3) عبر عن V_n و U_n بدلالة n

4) أدرس تغيرات المتتالية (V_n) ثم (U_n)

5) ما هي نهاية (V_n) ثم استنتج نهاية (U_n)

✓ الحل :

1) لتكن الدالة f المعرفة بـ؛ $f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ ومنه فإن، $U_{n+1}=f(U_n)$

نرسم في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ بيان الدالة f وليكن (d) ونرسم أيضا

وليكن (Δ) المستقيم ذوا العادلة $y=x$ نعلم U_0 على محور الفواصل

- نرسم مستقيم $x=U_0$ يقطع (d) في نقطة A_1 ترتيبها U_1

- نرسم من A_1 مستقيم يوازي (xx') يقطع؛ (Δ) في نقطة B_1

حيث ترتيبها هو U_1 وفاصلتها U_1

المسقط العمودي لـ: B_1 على محور الفواصل هي النقطة ذات الفاصلة U_1

النقطة A_2 هي نقطة تقاطع المستقيم المرسوم من النقطة $(U_1,0)$ و الموازي لـ: (yy') و المستقيم (d) فاصلتها U_1

- نرسم من A_2 مستقيم يوازي محور الفواصل يقطع (Δ) في B_2 ، فاصلتها B_2 هي U_2 وترتيبها هو U_2

المسقط العمودي لـ B_2 على محور الفواصل هي النقطة ذات الفاصلة U_2

وهكذا نواصل وضع الأعداد U_3 ، .... على مستقيم العددي

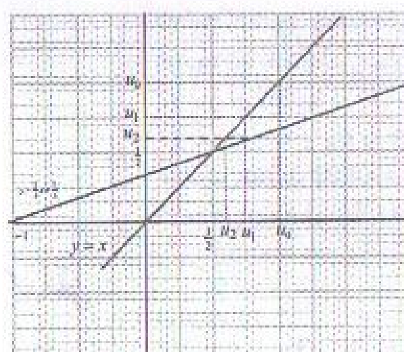
نلاحظ من الشكل أن المتتالية (U_n) تتناقص وتتقارب من القيمة $\frac{1}{2}$

2) إثبات أن (V_n) هندسية

(V_n) هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث؛ $V_{n+1}=V_n\times q$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1}-\frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{3}U_n+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}\left(V_n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}-\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}V_n+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}V_n \end{aligned}$$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول U_0 حيث: $V_0=\frac{1}{2}$



3) $V_n=V_0\times q^n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$V_n=U_n-\frac{1}{2}$ منه: $U_n=V_n+\frac{1}{2}$

$$U_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+1\right]$$

4) تغيرات المتتالية (V_n)

$$V_{n+1}-V_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+1-\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left[\frac{1}{3}-1\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{-2}{3}\right)$$

من اجل كل عدد طبيعي n: $V_{n+1}-V_n<0$ ومنه المتتالية (V_n) متناقصة تماما

بما ان: (V_n) متناقصة فإن: المتتالية ذات الحد العام: $\left(V_n+\frac{1}{2}\right)$ متناقصة وبالتالي المتتالية (U_n) متناقصة

5) بما أن $0<q<1$ فإن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty}V_n=0$

و منه نستنتج ان: $\lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{1}{2}$

تطبيق 20: استعمال متتالية هندسية في حساب الأجور

أجرة أستاذ تزداد بانتظام كل سنة: 5% فإذا كانت أجرته سنة 2004 هي $15000\,DA$ فكم عدد السنين حتى يتضاعف الأجر

الحل:

نفرض أن U_n هي أجرة الأستاذ سنة $(2004+n)$

فيكون: U_0 يساوي $15000\,DA$ و U_{n+1} هي أجرة الأستاذ سنة $(2004+n+1)$

$U_{n+1}=U_n+0,05\,U_n=(1+0,05)U_n=1,05\,U_n$

إذن اجرة الأستاذ تزداد وفق متتالية هندسية أساسها: $q=1,05$ وحدها الأول $U_0=15000DA$

الحد العام لهذه المتتالية هو: $U_n=U_0(1,05)^n$

$U_n=15000\times(1,05)^n(DA)$

اجرة الأستاذ ضعف ما هي عليه تعني: $U_n=2U_0$

$U_n=2U_0$ يكافئ: $2U_0=U_0\times(1,05)^n$ بالقسمة على U_0 نجد: $2=(1,05)^n$

ومنه: $n=15$ (لان: $(1,05)^{14}=1,979$).

تطبيق 21: مجموع حدود متتالية حدها العام مجموع لحدي عام متتالية حسابية وهندسية

(U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعبارة: $U_n=2^n+3n-4$

(V_n) و (W_n) المتتاليتان المعرفتان بـ: $V_n=2^n$ ، $W_n=3n-4$

1) بين أن (V_n) هندسية و (W_n) حسابية

2) أحسب المجموعين: $S_1=V_0+V_1+\dots+V_n$ ، $S_2=W_0+\dots+W_n$

3) استنتج المجموع S_3 حيث: $S_3=U_0+U_1+\dots+U_n$

الحل:

1) □ (V_n) هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r_1 بحيث: $V_{n+1}=V_n\times r_1$

$V_{n+1}=2^{n+1}\times2^n\times2^1=V_n\times2$

منه (V_n) متتالية هندسية أساسها $r_1=2$ وحدها الأول $V_0=2^0=1$

□ (W_n) حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r_2 بحيث: $W_{n+1}=W_n+r_2$

$W_{n+1}=3(n+1)-4=(3n-4)+3=W_n+3$

منه: (V_n) متتالية حسابية أساسها: $r_2=3$ وحدها الأول $W_0=-4$

2) □ حساب S_1 و S_2

* S_1 هو مجموع $(n+1)$ حد الأولى من حدود متتالية هندسية حدها الأول V_0 و أساسها r_1 ومنه: $S_1=V_0\times\frac{1-r_1^{n+1}}{r_1}$ وبالتعويض نجد:

$$S_1=2\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=-2(1-2^{n+1})=2^{n+2}-2$$

* S_2 هو مجموع $(n+1)$ حد الأولى من حدود متتالية حسابية حدها الأول W_0 وأساسها

n_2 ومنه : $S_2=\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(W_0+W_n\right)$ بالتعويض نجد

$$S_2=\frac{n+1}{2}(-4+3n-4)=\frac{n+1}{2}(-8+3n)$$

3) حساب المجموع S_3 : لاحظ ان : $U_n=V_n+W_n$

$$S_3=U_0+U_1+....U_n$$
$$=\left(V_0+W_0\right)+\left(V_1+W_1\right)+......\left(V_n+W_n\right)$$
$$=\left(V_0+V_1+..V_n\right)+\left(W_0+W_1+...W_n\right)\quad=S_1+S_2$$
$$=2^{n+1}-2+\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(-8+3n\right)$$

تطبيق . 22 : مجموع حدود متتالية (هندسية - حسابية)

1) (U_n) متتالية حسابية بحيث : $U_5=23$ و $U_7=33$

ا) احسب U_0 والأساس r

ب) احسب المجموع التالي : $S=U_5+....U_{105}$

2) (V_n) متتالية هندسية اساسها $q=3$ و $V_3=108$

احسب المجموع $S'=V_3+.......+V_{15}$

✓الحل :

1) ا) من اجل كل عددين طبيعيين n و p

$U_n=U_p+(n-p)r.....(1)$ بوضع : $n=7$ و $p=5$ في المساواة (1)

نجد : $U_7=U_5+2r$ ومنه : $r=\frac{U_7-U_5}{2}=\frac{33-23}{2}=\frac{10}{2}=5$

ب) عدد حدود المجموع S هو: $(105-5)+1=101$

إذن : $S=\frac{101}{2}\left(U_5+U_{105}\right)$

$$U_{105}=U_5+100\times r$$
$$U_{105}=23+100\times 5=523$$

إذن : $S=\frac{101}{2}(23+523)+50,5\times 546=27573$

2) عدد حدود المجموع S' هو: $(15-3)+1=13$

$$S'=V_3\times\frac{1-q^{13}}{1-q}=108\times\frac{1-3^{13}}{1-3}=-54\left(1-3^{13}\right)=54\left(3^{13}-1\right)$$

تطبيق . 23 : حساب المجاميع

- احسب المجاميع التالية:

$S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+.....+\frac{1}{1024}$ ، $S_3=1+\frac{1}{10}-\frac{1}{10^2}+.....+\frac{1}{10^{12}}$

$S_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-.....-\frac{1}{1048576}$ ، $S_4=-2+5+12+19+.....+68$

✓الحل :

حساب S_1 لاحظ ان : $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ، $\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ، $\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$ ، ...... ، $\frac{1}{1024}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

إذن : $S_1=\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+....\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

منه نستنتج ان S_1 هو مجموع 10 حدود متتالية هندسية اساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول : $\frac{1}{2}$ إذن :

$$S_1=\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)\times 2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)=1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$$

- حساب S_2 : لاحظ ان : $\frac{1}{2}=-\left(-\frac{1}{2}\right)^1$ ، $\frac{-1}{4}=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$\frac{1}{8}=-\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ ، $-\frac{1}{1048576}=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{20}$

إذن $S_2=-\left(\frac{1}{2}\right)^1-\left(\frac{-1}{2}\right)^2-\left(\frac{-1}{2}\right)^3-....-\left(\frac{-1}{2}\right)^{20}$

S_2 يشمل 20 حدا الأولى من حدود متتالية هندسية حدها الأول $-\left(-\frac{1}{2}\right)$

وأساسها : $q=\frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^2}{-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}$ ومنه نجد :

$$S_2=-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right]=\frac{1}{3}\times\left[1-\frac{1}{1048576}\right]=349525$$

تطبيق - 24 : متتالية حسابية — مجموع الحدود

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_1 وأساسها r و S_n مجموع n حد الأولى لهذه المتتالية : $S_n = U_1 + ...U_n$

1) احسب U_1 و S_n لما : $U_n=-31$ ، $r=-3$ ، $n=12$

2) احسب U_1 و U_n لما : $r=-6$ و $n=10$ ، $S_n=-270$

3) احسب r و U_1 لما : $U_n=72$ و $r=7$ ، $S_n=405$

✓ الحل :

1) $U_n=U_1+(n-1)r$ بتعويض قيمة n في عبارة الحد العام نجد : $U_{12}=U_1+115$

ومنه : $U_1=U_{12}-115$

$U_1=-31-11\times(-3)=33-31=2$

$S_n=U_1+....+U_{12}=\frac{12}{2}(U_1+U_{12})=6(2+(-31))=6(-29)=-174$

2) $U_1+U_2+........+U_{10}=-270$ و $r=-6$ و $n=10$

$\frac{10}{2}(U_1+U_{10})=-270....(1)$ بالتبسيط نجد : $U_1+U_{10}=-270.......(1)$

لدينا : $U_{10}=U_1+9r....(2)$ بطرح 2 من 1 نجد : $2U_1=0$

ومنه : $U_1=0$

إذن : $U_n=U_1+(n-1)r=-6(n-1)=-6n+6$

3) $S_n=U_1+....+U_n=405$ و $r=7$ ، $U_n=72$

$S_n=\frac{n}{2}(U_1+U_n)=405$ ومنه : $n(U_1+72)=810.....(1)$

$72=U_1+(n-1)\times7...(2)$

من (2) نجد ، $U_1=72-(n-1)\times7$ نعوض : U_1 في (1) نجد:

$n[72-7n+7+72]=810$ بالتبسيط نجد : $-7n^2+151n-810=0....(3)$

ليكن Δ مميز المعادلة (3) : $\Delta=(151)^2-4(-7)(-810)=121$

$n_1=\frac{-151+121}{-14}=\frac{-140}{-14}=10$ مقبول $n_2=\frac{-151-11}{-14}=\frac{-162}{-14}=11,57$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى N ، إذن : $n=10$

بالتالي : $U_1=72-(10-1)\times7=72-63=9$.

تطبيق - 25 : اتجاه تغير متتالية - المتتالية هندسية - التقارب

لتكن ، (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بالعلاقة $2nU_{n+1}=(n+1)U_n$ و $U_1=1$ بحيث حدودها موجبة

1) أ) احسب U_2 ، U_3 ، U_4

ب) بين أن (U_n) متناقصة

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $V_n=\frac{U_n}{n}$

أ) بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها q

ب) أدرس نهاية المتتالية (V_n)

3) عبر عن U_n بدلالة n ثم أدرس نهاية للمتتالية (W_n) المعرفة بـ: $W_n=\frac{U_n}{n+1}$

✓ الحل :

1) أ) $\begin{cases}U_{n+1}=\frac{n+1}{2n}U_n\\U_1=1\end{cases}$

$U_2=\frac{2}{2}U_1=U_1=1$ ، $U_3=\frac{3}{4}U_2=\frac{3}{4}$ ، $U_4=\frac{4}{6}U_3=\frac{4}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$

ب) إثبات أن (U_n) متناقصة

بما أن (U_n) حدودها موجبة فإن لإثبات أنها متناقصة يكفي إثبات : $\frac{U_{n+1}}{U_n}\le1$

$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$

من أجل كل $n\ge1$ فإن ، $2n\ge2$ ومنه ، $\frac{1}{2n}\le\frac{1}{2}$ بإضافة $\frac{1}{2}$ إلى طرفي المتباينة $\frac{1}{2n}\le\frac{1}{2}$ نجد : $\frac{1}{2}+\frac{2}{2n}\le1$ أي ، $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ إذن ، (U_n) متناقصة

2) أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية

(V_n) هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث : $V_{n+1}=qV_n$

$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}}{n+1}=\frac{n+1}{2n}U_n\times\frac{1}{n+1}=\frac{U_n}{2n}=\frac{1}{2}\left(\frac{U_n}{n}\right)=\frac{1}{2}V_n$

منه : (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_1=\frac{U_1}{1}=1$

ب) بما أن : $q=\frac{1}{2}$ و $V_1=1$ فإن الحد العام هو: $V_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

و بما أن : $|q|<1$ فإن : $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ومنه المتتالية (V_n) متقاربة نحو الصفر .

3) لدينا : $V_n=\frac{U_n}{n}$ ومنه : $U_n=n\times V_n$ أي : $U_n=n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$W_n=\frac{U_n}{n+1}=\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

بما أن : $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ فإن : $\lim_{n\to+\infty}W_n=1\times0=0$

أي أن المتتالية (W_n) متقاربة نحو الصفر .

تطبيق 26 : متتاليات تراجعية – متتالية هندسية

لتكن (U_n) متتالية معرفة كما يلي : $\begin{cases}U_0=0\ ,\ U_1+1\\ U_{n+1}=\frac{1}{2}(U_n+U_{n-1})\end{cases}$

1) أحسب : U_4 , U_3 , U_2

2) نضع : $V_n=U_{n+1}-U_n$

ا) برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول V_0 ثم عبر عن V_n بدلالة n

✓ الحل :

1) $U_2=\frac{1}{2}(U_1+U_0)=\frac{1}{2}$

$U_3=\frac{1}{2}(U_2+U_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4}$

$U_4=\frac{1}{2}(U_3+U_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$

2) (V_m) هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث : $V_{n+1}=q\times V_n$

$V_{n+1}=U_{n+2}-U_n$

$V_{n+1}=\frac{1}{2}(U_{n+1}+U_n)-U_n\ =\frac{1}{2}U_{n+1}+\frac{1}{2}U_n-U_n\ =\frac{1}{2}U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n$

$=\frac{1}{2}(U_{n+1}-U_n)=\frac{1}{2}V_n$

منه (U_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول : $V_0=U_1-U_0=1$ ومنه الحد العام هو : $V_n=V_0\times q^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

تطبيق 27 : متتالية حدها العام هو مجموع لحدي عام لمتتالية حسابية وهندسية

ليكن (U_n) و (V_n) متتاليتين معرفتان كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n=2^n$ و $V_n=3n-7$

1) أثبت أن (U_n) متتالية هندسية و (V_n) متتالية حسابية ثم عين الحد الأول لكل منها .

2) احسب المجموع : $S_n=U_0+U_1+.......+U_n$ ، $S'_n=V_0+V_1+.......+V_n$

3) احسب المجموع : $S''_n=(-6)+(-2)+(3)+...+(2^n+3n-7)$

✓ الحل :

1) □ إثبات أن (U_n) متتالية هندسية

(U_n) متتالية هندسية أساسها r يعني من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1}=U_n\ r$

من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1}=2^{n+1}=2^n\times2=U_n\times2$

منه (U_n) متتالية هندسية أساها $r=2$. وحدها الأول هو: $U_0=2^0=1$

□ إثبات أن (V_n) متتالية حسابية

(V_n) متتالية حسابية أساها r يعني أن من أجل كل عدد طبيعي : $V_{n+1}=V_n+r'$

من أجل كل عدد طبيعي : $V_{n+1}=3(n+1)-7=(3n-7)+3=V_n+3$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r'=3$ وحدها الأول : $V_0=3\times0-7=-7$

2) □ حساب المجموع $S_n=U_0+U_1+........+U_n$

S_n عبارة عن مجموع $(n+1)$ حد الأولى من حدود متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول

1 و منه : $S_n=1\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$

□ حساب المجموع S'_n

S'_n عبارة عن مجموع $(n+1)$ حد الأولى من حدود متتالية حسابية أساسها : $r'=3$ وحدها الأول يساوي 7 منه :

$$S_n = \frac{n+1}{2}(V_0+V_n) = \frac{n+1}{2}(-7+3n-7) = \frac{n+1}{2}(3n-14)$$

إذن: $S_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(3n-14)$

3) □ حساب المجموع S''_n

$$S''_n = (-6)+(-2)+(3)+...+(2^n+3n-7) = (U_0+V_0)+(U_1+V_1)+......+(U_n+V_n)$$

$$= (U_0+U_1+...+U_n)+(V_0+V_1+...+V_n) = S_n+S'_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(3n+14)+2^{n+1}-1$$

تطبيق 28 : تعيين ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية

a,b,c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية حيث: $a\times b\times c=64$ و $\frac{7}{8}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$

- عين الأعداد الحقيقية a,b,c

✓ الحل :

بما أن a,b,c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن: $ac=b^2$

$\begin{cases} abc=64 \\ ac=b^2 \end{cases}$ يكافئ: $\begin{cases} b^3=64 \\ ac=b^2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} b=4 \\ ac=16 \end{cases}$

بتعويض قيمة b في المساواة: $\frac{7}{8}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$ نجد: $\frac{5}{8}=\frac{1}{4}-\frac{7}{8}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}$

إذن: $\begin{cases} ac=16 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8} \end{cases}$ ......(1)

(1) يكافئ: $\begin{cases} c=\frac{16}{a} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{16}{a}}=\frac{5}{8} \end{cases}$ يكافئ: $\begin{cases} c=\frac{16}{a} \\ \frac{1}{a}+\frac{a}{16}=\frac{5}{8} \end{cases}$ يكافئ: $\begin{cases} c=\frac{16}{a} \\ \frac{16+a^2}{16a}=\frac{5}{8} \end{cases}$

يكافئ: $\begin{cases} c=\frac{16}{a} \\ \frac{16+a^2}{2a}=5 \end{cases}$ يكافئ: $\begin{cases} c=\frac{16}{a} \\ a^2-10a+16=0 \end{cases}$

$a^2-10a+16=0$

$$\Delta' = 25-(1)(16)=9$$

$a_2=\frac{3-5}{1}=2$ ، $a_1=\frac{5+3}{1}=8$

□ الحالة الأولى $a=a_1$

$a=a_1$ يكافئ: $c_1=\frac{16}{8}=2$ منه $(a,b,c)=(8,4,2)$

□ الحالة الثانية $a=a_2$

$a=a_2$ يكافئ: $c_2=\frac{16}{2}=8$ ، منه $(a,b,c)=(2,4,8)$

تطبيق 29 : حساب جداء حدود متتابعة لمتتالية هندسية

لتكن (V_n) متتالية هندسية حدها الأول V_0 وأساسها r ، حيث: $r>0$

1) عين الأساس r إذا علمت أن: $V_0=3$ و $V_2+V_4=60$.

2) عين عبارة V_n بدلالة n ثم احسب المجموع: $S_n=V_0+V_1+....+V_{n+1}$ بدلالة n .

3) احسب الجداء ، $P=V_0\times V_1\times...\times V_n$

✓ الحل :

1) □ تعيين الأساس r

بما أن (V_n) متتالية هندسية حدها الأول V_0 فإن الحد العام لها $V_n=V_0\times r^n$ ومنه :

$V_4=V_0\times r^4=3r^4$ ؛ $V_2=V_0\times r^2=3r^2$

$V_2+V_4=60$ يكافئ: $3r^2+3r^4=60$ يكافئ: $r^4+r^2=20$

يكافئ: $r^4+r^2-20=0$

بوضع، $y=r^2$ تصبح المعادلة: $r^4-r^2-20=0$ كما يلي: $y^2+y-20=0$

$$\Delta=1-4(1)[(-20)]=81$$

$y_1=\frac{-1+9}{2}=4$ مقبول ، $y_2=\frac{-1+9}{2}=-5$ مرفوض لأن: $y>0$

$y=r^2$ يكافئ: $r^2=4$ يكافئ: $(r=2)$ أو $(r=-2)$ يكافئ: $r=2$

2) □ تعيين عبارة V_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $V_n=V_0\times r^n=3\times 2^n$

□ حساب قيمة المجموع: $S_n=V_0+V_1+....V_{n+1}$

S_n عبارة عن مجموع: $(n+2)$ حدا الأولى من حدود متتالية هندسية حدها الأول V_0

وأساسها r ومنه :

$$S_n = V_0 \times \frac{r^{n+2}-1}{r-1} = 3\times\frac{2^{n+2}-1}{2-1} = 3\left(2^{n+2}-1\right)$$

3) حساب الجداء : $p = V_0\times V_1\times....\times V_n$

p عبارة عن جداء $(n+1)$ حد الأولى من حدود متتالية هندسية

$$p = V_0\left(V_0\ r^1\right)\times\left(V_0\ r^1\right)\times.....\times\left(V_0\ r^n\right)$$

$$p=\left(V_0\times V_0\times.......\times V_n\right)\times\left(r^1\times r^2\times......\times r^n\right)$$

$$p = V_0^{n+1}\times r^{1+2+3+....+n} = V_0^{n+1}\times r^{\frac{n(n+1)}{2}} = 3^{n+1}\times 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

تطبيق 30 : حساب مجموع مربعات حدود لمتتالية هندسية

لتكن (V_n) متتالية حقيقية معرفة كما يلي : $V_{n+1}=2V_n-3n+2$ و $V_0=4$

ولتكن (U_n) متتالية معرفة بـ : $U_n = V_n - 3n - 1$

1) اثبت ان (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول U_0

2) استنتج عبارة V_n بدلالة n

3) أ) احسب المجموع : $S_n = U_0+U_1+....U_n$

ب) احسب : $S'_n = V_0+V_1+....V_n$

4) احسب المجموع : $S''_n = U^2_0+U^2_1+.....+U^2_n$

الحل :

1) إثبات ان (U_n) متتالية هندسية

(U_n)) متتالية هندسية أساسها r) يعني من اكل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=U_n\times r$

من أكل عدد طبيعي n ، $U_{n+1}=V_{n+1}-3(n+1)-1 = 2V\ n-3n+2-3n-3-1=2U_n$

ومنه (U_n) متتالية هندسية أساسها $r=2$ وحدها الأول $U_0=V_0-3+4-1=3$

2) تعيين V_n لدلالة n

بما ان (U_n) متتالية هندسية أساسها $r=2$ وحدها الأول $U_0=3$ فإن الحد العام

$U_n = 3\times 2^n$

لدينا : $U_n=V_n-3n-1$ يكافئ : $V_n=U_n+3n+1$

يكافئ : $V_n = 3\times2^n+3n+1$

إذن من أجل كل عدد طبيعي : $V_n=3\times2^n+3n+1$

3) أ) حساب المجموع S

S عبارة عن مجموع $(n+1)$ حدا الأولى من حدود متتالية هندسية منه:

$$S=U_0\times\frac{r^{n+1}-1}{r-1} = 3\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=3\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

ب) حساب المجموع S'

$S'=V_0+V_1+...+V_n$

لدينا : $U_n = V_n - 3n-1.$

$U_0=V_0-3\times0-1.$

$U_1=V_1-3\times1-1$

$U_2=V_2-3\times2-1$

$U_{n-1}=V_{n-1}-3(n-1)-1$

$U_n=V_n-3n-1$ بجمع أطراف المساويات طرفا لطرف نجد :

$$U_0+U_1+...+U_n=\left(V_0+V_1+...+V_n\right)-3\left(0+1+2+....+n\right)-\left(1+1+...+1\right)$$

$$S=S'-3\left(1+2+...+n\right)+\underbrace{\left(1+1+1...+1\right)}_{(n+1)\ \text{مرة}}$$

$$S'=3\left(2^{n+1}-1\right)+3\times\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=3\left(2^{n+1}-1\right)+\frac{3n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$S'=3\left(2^{n+1}-1\right)+\frac{(n+1)+2(3n+2)}{2}$$

4) حساب المجموع S''

$$S''=U_0^2+U_1^2+...+U_n^2 = U_0^2+U_0^2r^2+...+U_0^2r^{2n}=U_0^2\left[1+r^2+.....+r^{2n}\right]$$

$$=U_0^2\times\left[1+r^2+.....+\left(r^2\right)^n\right]$$

$1+r+......r^{2n}$ عبارة عن مجموع $(n+1)$ حدا الأولى من حدود متتالية هندسية أساسها r^2 وحدها الأول 1

$$1+r+.......r^{2n}=1\times\frac{\left(r^2\right)^{n+1}-1}{r^2-1}=\frac{r^{2n+2}-1}{r^2-1}$$

إذن $S''=U_0^2\times\left[1\times r^2+.....+r^{2n}\right]=9\times\frac{2^{2n+2}-1}{3}=3\left(2^{2n+2}-1\right)$

تمارين و مسائل

1 (U_n) متتالية معرفة بحدها الأول $U_0=3$ وعلاقة تراجعية تعطى U_{n+1} بدلالة U_n
أحسب U_1 ، U_2 ، U_3 ، U_4 في كل حالة من الحالات التالية :
ا) $U_{n+1}=(U_n-2)^2$ ، ب) $U_{n+1}=5U_n-3$ ، ج) $U_{n+1}=\sqrt{2U_n+3}$
د) $U_{n+1}=\frac{2U_n}{U_n+2}$ ، هـ) $U_{n+1}=\frac{1}{U_n}+1$ ، و) $U_{n+1}=\sqrt{|-U_n+2|+1}$

2 (V_n) متتالية معرفة $V_n=\frac{n^2-n-2}{n+3}$
ا) أوجد عبارة U_{n+1} بدلالة U_n
ب) احسب الحدود الخمسة الأولى U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 ، U_4
ج) مثل هندسيا هذه الحدود في معلم متعامد $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{i}\|=1$ و $\|\vec{j}\|=3$

3 أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) في كل حالة من الحالات التالية :
ا) $U_n=n^2+3$ ، ب) $U_n=3n-5$ ، ج) $U_n=\sqrt{\frac{n+1}{2}}$ ، د) $U_n=\frac{2+n}{n^2}$
ه) $U_n=3-\sqrt{n+3}$ ، و) $U_n=\frac{3n+1}{2n+5}$ ، ن) $U_n=\frac{n+3}{2^n}$ ، ف) $U_n=\frac{(\sqrt{2})^n}{n+1}$

4 (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 أساسها r
عين عبارة الحد العام في كل حالة من الحالات التالية :
ا) $U_0=2$ و $r=3$ ، ب) $U_0=-3$ و $r=\sqrt{2}$ ج) $U_0=\frac{2}{5}$ و $r=\frac{1}{2}$

5 1) لتكن (U_n) متتالية حسابية
أوجد الحد الأول U_0 و الأساس r في كل حالة من الحالات التالية :
ا) $U_3=12$ و $U_7=24$ ، ب) $U_5=-9$ و $U_{11}=-21$ ،
ج) $U_3=\frac{11}{2}$ و $U_8=13$

2) أوجد ستة أعداد فردية متتابعة علما أن مجموعها 49 .

6 (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r ، عين عبارة U_n في كل حالة من الحالات التالية :
1) $U_0+U_1+U_2=15$ و $U_0^2+U_1^2+U_2^2=93$
2) $U_0+U_1+U_2=-12$ و $U_0^2+U_1^2+U_2^2=146$
3) $U_5+U_6+U_7=-27$ و $U_{100}=-15$
4) $U_6+U_8+U_{10}+U_{12}=91$ و $U_2+U_4=21$

7 نعطي خمسة أعداد حقيقية a ، b ، c ، d ، e بحيث هذا الترتيب تشكل حدود لمتتالية حسابية .
1) عبر عن الأعداد a, b, d, e بدلالة c والأساس r للمتتالية .
2) عبر عن المجموع $a+b+c+d+e$ بدلالة c ، إذا علمت أن هذا المجموع يساوي 30 و $b=5$ أحسب الحد الخامس لهذه المتتالية

8 1) احسب مجموع مضاعفات العدد 5 الأقل من 2000
2) احسب مجموع مضاعفات 5 المحصورة بين 2000 و 3000
3) احسب مجموع مضاعفات 5 المحصورة بين 2000 و 5000

9 1) احسب عشرة الحدود الأولى من متتالية هندسية حدها الأول $U_0=3$ وأساسها $q=2$
2) أوجد U_0 و r في كل حالة من الحالات التالية
ا) $U_2=12$ و $U_5=160$
ب) $U_1\times U_3=\frac{16}{729}$ و $U_1+U_2=\frac{10}{27}$
3) a, b, c ثلاث حدود متتابعة بهذا الترتيب شكل متتالية حسابية و a, c, b بهذا الترتيب تشكل متتالية هندسية و $a+b+c=18$ احسب a و b و c.

10 ادرس تقارب المتتاليات في كل حالة من الحالات التالية
ا) $U_n=\frac{3^n}{2^{n+2}}$ ، $V_n=\frac{2^n-1}{3^n}$
ب) $U_n=3+\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ ، $V_n=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$
ج) $U_n=\frac{3^n+2^n}{5^n}$ ، $V_n=\frac{3^n+7^n}{5^n}$

11 عين ثلاث أعداد حقيقية غير معدومة a , b , c بحيث a , b , c بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية و $a+b+c=9$ و $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{32}{10}$

12 لتكن $(U_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية

1) عين الأعداد الحقيقية: U_0, U_1, ..., U_4
إذا علمت أن: $U_0\times U_4=144$ و $U_1+U_2+U_3=42$

2) ا) عين بدلالة n الحد العام U_n
ب) أحسب المجموع: $S_1=U_0+U_4+....+U_{99}$
ج) أحسب الجداء: $P=U_0\times U_1\times ......\times U_{99}$

13 لتكن المتتاليتان (U_n) و (V_n) بحيث من أجل كل: $n\in N$: $U_{n+1}=\frac{1}{4}(3V_n+5)$

1) ا) برهن أنه إذا كانت (U_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ فإن من أجل كل $n\in N$، $V_{n+1}=\frac{1}{4}(V_n-5)$.
ب) أحسب U_n بدلالة n و U_0 ثم V_n بدلالة n و U_0
جـ) أحسب المجموعين التاليين:
$S_1=U_0+U_1+...+U_n$ ، $S_2=V_0+V_1+.....+V_n$

14 لتكن (V_n) متتالية معرفة كما يلي: $V_0=2$ و $V_1=3$ ومن أجل كل $n\in N$:
$V_{n+2}=(\alpha+1)V_{n+1}-\alpha V_n$ ، $\alpha\in IR^*$
ولتكن (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة: $U_n=V_{n+1}-V_n$

1) برهن أن (U_n) متتالية هندسية.
2) أوجد عبارة U_n بدلالة n و α
3) أحسب المجموع: $S_n=U_0+U_1+...+U_n$ بدلالة n و α
4) استنتج مما سبق عبارة V_n بدلالة n و α

15 لتكن المتتالية (V_n) معرفة كما يلي:
$V_0\in IR$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $V_{n+1}=\frac{1}{5}V_n+2$

1) ما هي قيمة V_0 الممكنة حتى تكون المتتالية (V_n) ثابتة ؟
2) نفرض أن: $V_0\neq\frac{5}{2}$، ولنعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بـ: $U_n=V_n-\alpha$ ، $\alpha\in IR$
ا) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (U_n) هندسية ؟

ب) أوجد عبارة U_n بدلالة n و V_0 ثم استنتج عبارة V_n بدلالة n و V_0
ج) أحسب المجاميع
$S_1=V_0+V_1+......+V_n$ ، $S_2=U_0+U_1+......+U_n$ ، $S_3=V^2_0+V_1^2+......+V^2_n$

16 لتكن (U_n) متتالية معرفة كما يلي:
$U_0=6$ و $U_1=9$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+2}=2U_{n+1}-U_n$

1) أثبت أن (U_n) متتالية حسابية
2) أحسب المجموع: $S_n=U_0+U_1+......+U_n$ بدلالة n
3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة: $V_n=5^{U_n}$
ا) برهن أن (V_n) متتالية هندسية ، ب) أحسب V_n بدلالة n
ج) أحسب المجموع: $S=V_0+V_1+......+V_{10}$

17 لتكن $(V_n)_{n\in N}$ متتالية حسابية

1) عين الأساس r والحد الأول V_0 للمتتالية (V_n) إذا علمت أن:
$V_0+V_1+V_2=24$ و $V_0\times V_2=39$
2) عين عبارة V_n بدلالة n
3) عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $V_0+V_1+....+V_n=65$

18 لتكن (V_n) متتالية معرفة بحدها الأول $V_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:
$V_{n+1}=5V_n-8n-2$
ولتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ: $U_n=V_n-2n-1$

1) ا) بين أن (U_n) متتالية هندسية ، ب) أحسب U_n بدلالة n
جـ) استنتج عبارة V_n بدلالة n
2) أحسب المجموعين $S_1=U_0+U_1+.......+U_n$ ، $S_2=V_0+V_1+.......+V_n$

19 عين ثلاث أعداد حقيقية: x , y , z بحيث هذا الترتيب تشكل متتالية هندسية و y , x , z بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية و $x+y+z=\alpha$ ؛ $\alpha\in IR^*$

20 لتكن (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة: $V_{n+1}=\alpha V_n+3$
حيث: $\alpha\in IR^*$

1) عين قيمة α حتى تكون (V_n) متتالية حسابية
2) نفرض أن: $\alpha\neq 1$، ولنعتبر المتتالية (U_n) معرفة بـ: $U_n=V_n-\beta$ ، $\beta\in IR^*$
ا) عين العلاقة التي تربط بين α و β حتى تكون (U_n) متتالية هندسية
ب) عين عبارة U_n و V_n بدلالة n, α, β

21 لتكن (V_n) متتالية معرفة بحدها الأول V_0 والعلاقة التراجعية: $V_{n+1}=\frac{1}{3}V_n+2$

1) ما هي قيمة V_0 الممكنة حتى تكون المتتالية (V_n) ثابتة.

2) نفرض أن: $V_0 \neq 3$، ونعرف المتتالية (U_n) كما يلي: $U_n=V_n+\alpha$ ، $\alpha\in IR^*$

بين أنه توجد قيمة لـ: α بحيث من أجلها تكون (U_n) متتالية هندسية

ب) أعط عبارة V_n بدلالة V_0 و n ثم استنتج أن: (V_n) متتالية متقاربة

ج) أحسب نهاية V_n لما $n\to+\infty$

---

22 لتكن المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي:

$V_0=1$ و $V_1=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $V_{n+1}=\frac{3}{2}V_{n+1}-\frac{1}{2}V_n$

ولنعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة: $U_n=V_{n+1}-V_n$

1) برهن أن: (U_n) متتالية هندسية

2) احسب U_n بدلالة n ثم استنتج عبارة V_n بدلالة n

3) عين أصغر عدد طبيعي n بحيث: $|V_n-3|<10^{-5}$

---

23 لتكن المتتاليتان $(U_n)_{n\in N}$ و $(V_n)_{n\in N}$

المعرفتين كما يلي: $U_{n+1}=\frac{1}{4}(3V_n+\alpha)$ ، $\alpha\in IR^*$

1) برهن أنه إذا كانت (U_n) متتالية هندسية أساسها $r=\frac{1}{4}$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $V_{n+1}=\frac{1}{4}(V_n-\alpha)$

2) احسب U_n بدلالة n و U_0 ثم احسب V_n بدلالة: n ، U_0 ، α

3) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

4) أ) احسب S_n بدلالة n و U_0 حيث: $S_n=U_0+U_1+....U_n$

ب) احسب S'_n بدلالة n ، U_0 ، α حيث: $S'_n=V_0+V_1+.....+V_n$

---

24 عين ثلاث أعداد حقيقية غير معدومة a, b, c بحيث: a, b, c بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية و b, a, c بهذا الترتيب تشكل متتالية هندسية والعدد $(a+b+c)$ قاسم أولي للعدد 1998.

---

25 لتكن $(V_n)_{n\in N^*}$ متتالية هندسية

1) عين: V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 بحيث: $V_1\times V_4=4$ و $V_2+V_3+V_4=7$

2) أ) احسب S_n بدلالة n حيث: $S_n=V_1+V_2+......+V_n$

ب) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

---

26 (U_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول: $U_0=3$ وبالعبارة: $3U_{n+1}-2U_n=U_n+\frac{9}{2}$

1) أثبت أن (U_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r ثم أحسب: U_1 ، U_2 ، U_3

2) أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n ثم أحسب الحد التاسع عشر

3) أحسب $S=U_0+U_1+..U_{19}$

---

27 (U_n) متتالية معرفة بالعلاقة: $U_n=\sqrt{3n}-5$

1) أحسب U_0 ، U_1 ، U_2

أثبت أن (U_n) متزايدة تماما على N

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $V_n=U^2_n+10U_n+11$

أحسب V_0 ، V_1

ب) أحسب V_n بدلالة n ثم بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعين أساسها

ج) أحسب المجموع: $S_n=V_0+V_1+....+V_n$ بدلالة n

د) هل العدد 115 هو حد من حدود المتتالية (V_n)

---

28 لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على N كما يلي:

$V_0=3$ و $V_{n+1}=V_n+6n+3$ ، $U_n=V_n-3n^2$

1) أحسب V_1 ، V_2 ثم استنتج أن (V_n) لا هي حسابية ولا هي هندسية

2) بين أن المتتالية (V_n) متزايدة تماما على N

3) أثبت أن المتتالية (U_n) حسابية ثم عين أساسها وحدها الأول

4) عين عبارة U_n ثم V_n بدلالة n

5) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع: $S_n=U_0+U_1+.....+U_{n+1}$

ثم عين قيمة n حتى تكون: $S_n=-88$

---

29 لتكن (V_n) ، (U_n) ، (w_n) ثلاث متتاليات معرفة بـ: $U_0=12$ و $U_{n+1}=\frac{V_n+3U_n}{4}$

$V_0=1$ و $V_{n+1}=\frac{V_n+2U_n}{3}$ و $w_n=U_n-V_n$

2) أحسب: w_0 ، w_1 ، w_2

2) بين أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

3) أ) أكتب w_n بدلالة n

ب) أحسب الحد الثالث عشر

4) أحسب: $S_n=w_0+w_1+......+w_n$ بدلالة n

5) بين أن : $U_{n+1}-U_n=-\frac{1}{4}w_n$ و $V_{n+1}-V_n=\frac{2}{3}w_n$

ثم استنتج أن (U_n) متتالية متناقصة تماما على N و (V_n) متزايدة تماما على N

6) باستعمال السؤال 4) و 5) ، أوجد عبارة U_n و V_n بدلالة n

7) لتكن (k_n) متتالية معرفة كما يلي : $k_n=8U_n+3V_n$ اثبت أن (k_n) متتالية ثابتة

30 لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_0

1) عين الأساس r والحد الأول U_0 إذا علمت أن :

$U_{15}=52$ و $U_0+U_1+......+U_{15}=472$

2) عين عبارة الحد العام U_n بدلالة n

3) أحسب المجموع : $S=U_0+U_1+........+U_{100}$

31 لتكن (U_n) متتالية معرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي : $U_n=\frac{1}{2+n}-\frac{1}{1+n}$

1) أحسب : U_0 , U_1 , U_2

2) بين أن (U_n) متتالية متزايدة تماما

3) أحسب المجموع : $S_n=U_0+U_1+....+U_n$ بدلالة

32 لتكن (V_n) متتالية معرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي n ، $V_{n+1}=3V_n+2$

1) عين قيمة V_0 حتى تكون (V_n) متتالية ثابتة

2) نفرض أن $V_0\neq -1$ ولتكن التتالية (U_n) المعرفة على n كما يلي $U_n=V_{n+1}-V_n$

أ) أثبت أن (U_n) متتالية هندسية يطلب حساب حدها الأول U_0 وأساسها

ب) عين U_n بدلالة n و V_0 ، V_1

ج) أحسب المجموع : $S_n=U_0+U_1+....+U_n$ بدلالة n و V_0 ، V_1.

33 (U_n) متتالية معرفة بـ : $U_0=3$ و $U_{n+1}=\frac{3}{\sqrt{5}}U_n$

أ) أحسب المجموع : $S_n=U_0+U_1+....+U_n$ بدلالة n

ب) هل التتالية (S_n) لها نهاية .

34 A_0 و B نقطتين من المستوي بحيث : $A_0B=1$

كل المثلثات BA_nA_{n+1} قائمة في النقطة A_n ومتقايسة الساقين . كما هو موضح في الشكل المجاور .

نضع : $U_n=A_nA_{n+1}$ و $V_n=BA_n$

1) أ) أحسب U_0 , U_1 , U_2 , U_3

ب) بين أن هذه الحدود لمتتالية هندسية

2) أ) أحسب V_0 , V_1 , V_2 , V_3

ب) بين أن هذه الحدود لمتتالية هندسية

ج) أين تقع النقطة A_4 ثم أحسب U_4 و V_4

35 لتكن (C_0) الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $15cm$

- ارسم الدائرة (C_1) مركزها O ونصف قطرها $\frac{1}{4}\times15$ ثم ارسم الدائرة (C_2) مركزها O ونصف قطرها $\left(\frac{1}{4}\right)^2\times15$ وهكذا ننشئ الدوائر الأخرى .

1) أ) نرمز بـ : P_n إلى محيط الدائرة (C_n)

بين أن المتتالية (P_n) هندسية يطلب تعيينها

ب) ما هو محيط كل الدوائر المرسومة (حتى (C_n))

هل هذا المحيط له نهاية لما n يؤول إلى $(+\infty)$

2) نرمز بـ : A_n إلى مساحة الدائرة (C_n)

أ) بين أن المتتالية (A_n) هندسية يطلب تعيينها .

ب) ما هي نهاية مجموع مساحات الدوائر (حتى (C_n)) هل هذا المجموع له نهاية ؟

36 شخص له رأس مال يقدر بـ $20000\,DA$ أراد أن يوضع هذا المال في بنك فعرضت عليه بنكين لوضع هذا المال

- البنك الأول : يوضع هذا المال بفائدة ثابتة 5% في كل سنة من رأس المال
- البنك الثاني : يوضع هذا المال بفائدة 2% لكل سنة

1) ما هو البنك الأفضل لمدة 4 سنوات

2) في كل حالة أوجد عدد السنين بحيث رأس المال يتضاعف

37 (U_n) متتالية هندسية حدها الأول U_1+2 و $r=-3$

1) أوجد العددين الحقيقيين P_n و q_n بحيث المعادلة $x^2+P_nx+q_n=0$ لها حلين هما U_n و U_{n+1}

2) نرمز بـ : (V_n) إلى المتتالية ذات الحد العام : $V_n=\frac{P_n}{q_n}$

- برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها

38 لتكن (U_n) متتالية معرفة كما يلي ؛ $U_{n+2}=U_{n+1}+U_n$ من أجل كل $n\in N$

1) نضع ؛ $U_0=1$ و $U_1=1$ احسب 21 حد الأولى لهذه المتتالية

2) نضع ؛ $W_n=\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\times\sqrt{5}}$

- احسب W_0 ، W_1 ، W_2 (بدون الآلة الحاسبة)
- احسب باستعمال الآلة الحاسبة الحد السابع عشر ماذا تستنتج ؟

3) نضع ؛ $V_n=\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ وليكن $\vartheta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

- أحسب 20 حدا الأولى من المتتالية (V_n) ثم قارنهم مع العدد ϑ ماذا تستنتج فيما يخص المتتالية (V_n) .

39 $ABCD$ مربع طور ضلعه 1 نرسم مربع آخر بحيث رؤوسه منتصفات أضلاع $ABCD$ وهكذا نرسم المربعات الأخرى انظر الشكل .

نرمز بـ ؛ S_n إلى مساحة المربع المحصل عليه في المرحلة n

1) أحسب S_1 و S_2 و S_3

ب) أحسب S_{n+1} بدلالة S_n ثم احسب $\lim\limits_{n\to} S_n$

2) أحسب $V_n=S_1+S_2+.....+S_n$ بدلالة n

ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

3) نرمز بـ إلى d_n إلى مساحة المثلثات الناتجة في المرحلة n

ا) أحسب d_1 و d_2 ثم أوجد علاقة بين d_n و d_{n+1}

ب) أحسب المجموع $L_n=d_1+d_2+....+d_n$ وماذا يمثل ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$



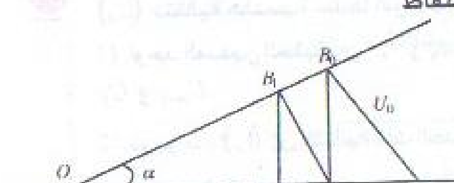
40 $[ox)$ و $[oy)$ نصفي مستقيمين يصنعان زاوية هندسية حادة قيسها α

A_0 نقطة من $[ox)$ و B_0 مسقطها العمودي على $[oy)$ و A_1 مسقط B_0 على $[ox)$

B_1 مسقط A_1 على $[oy)$ وهكذا بقية النقاط

1) بين أن $A_{n+1}B_n=(\cos\alpha)(A_nB_n)$

$A_{n+1}B_{n+1}=(\cos\alpha)(A_{n+1}B_n)$



2) نضع ؛ $U_n=A_nB_n$

ا) بين أن ؛ $U_0=5\cos\alpha$

ب) عبر عن ؛ U_{n+1} بدلالة U_n

ج) ما هي طبيعة المتتالية (U_n) ثم أوجد عبارة U_n بدلالة n و α

د) أحسب المجموع $S_n=U_0+U_1+...+U_n$ ؛ أحسب $\lim S_n$.



الدرس : 7

الاحصاء

1 . الأرباع

نعتبر سلسلة إحصائية ذات متغير كمي (نمط كمي) .

الأرباع هي الأعداد التي تقسم السلسلة الإحصائية إلى أربعة أجزاء تحتوي كل منها على نفس عدد الحدود أي 25% من التكرار الكلي .

مثال

إليك السلسلة الإحصائية التالية ؛

قيم النمط	2	3	5	11
التكرار	5	5	5	6

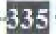
1) ا) رتب قيم السلسلة الإحصائية ترتيبا تصاعديا

ب) أحسب الوسيط لهذه السلسلة الإحصائية

ج) أحسب قيمة الوسط الحسابي لهذه السلسلة

2) ا) أوجد أصغر قيمة للنمط بحيث على الأقل 25% من حدود السلسلة تملك قيما أصغر منه أو تساويه

ب) أوجد أصغر قيمة للنمط بحيث على الأقل 75% من حدود السلسلة تملك قيما أصغر منه أو تساويه ، ماذا تستنتج ؟



✓ الحل :

1) ا) 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 11, 11, 11, 11, 11, 11

ب) التكرار الكلي لهذه السلسلة هو : $N=21$

الوسيط M_e يقسم التكرار الكلي إلى قسمين بحيث 50% من التكرارات قيم أنماطها تكون أصغر أو تساويه

بما أن : $N=21$ فردي فإن الوسيط رتبته : $\frac{N+1}{2}=11$ ومنه قيمة الوسيط هي ($M_e=5$)

ج) الوسط الحسابي للسلسلة المعطاة هو $\bar{x}$ حيث

$$\bar{x}=\frac{x_1n_1+x_2n_2+x_3n_3+x_4n_4}{N}=\frac{2\times5+3\times5+5\times5+6\times11}{21}=\frac{116}{21}=5{,}523$$

2) ا) أصغر قيمة للنمط بحيث على الأقل 25% من حدود السلسلة تملك قيما أصغر منه أو

تساويه هو الحد في السلسلة الإحصائية المرتبة ترتيبا تصاعديا الذي رتبته : $\frac{N}{4}$

إذا كان $\frac{N}{4}$ طبيعي وإذ كان $\frac{N}{4}$ ليس طبيعي فإن رتبته هي العدد الطبيعي الذي يلي $\frac{N}{4}$ مباشرة .

بما أن : $N=21$ فإن : $\frac{N}{4}=5{,}25$ وبالتالي رتبته أصغر قيمة للنمط هي 6 والتي تتمثل في العدد 3 ونرمز إلى هذه القيمة بـ : Q_1 ونكتب : $Q_1=3$

ب) أصغر قيمة للنمط بحيث على الأقل 75% من حدود السلسلة تملك قيما أصغر من

أو تساويه هو الحد في السلسلة الإحصائية المرتبة ترتيبا تصاعديا الذي رتبته $\frac{3N}{4}$ إذا كان $\frac{3N}{4}$ عدد طبيعي وإذا كان $\frac{3N}{4}$ ليس عدد طبيعي فإن رتبته هي العدد الطبيعي الذي يلي $\frac{3N}{4}$ مباشرة .

بما أن $\frac{3N}{4}=15{,}75$ فإن رتبة أصغر قيمة لهذا النمط هي 16 و تتمثل في العدد 11 ونرمز إلى هذه القيمة بـ: Q_3 وتكتب $Q_3=11$

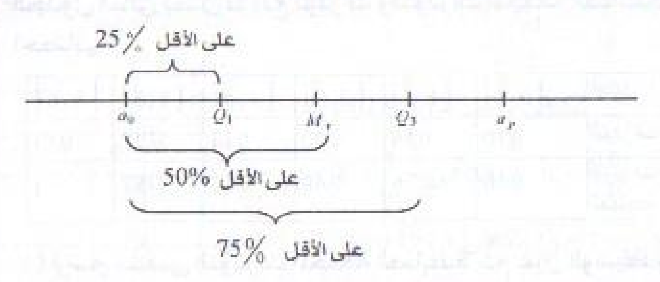
2, 2, 2, 2, 2 3, 3, 3, 3, 3 5, 5, 5, 5, 5 11, 11, 11, 11, 11, 11

Q_1 ↓ ، M_e ↓ ، Q_3 ↓

الأعداد Q_1 ، M_e ، Q_3 هي قيم التي تجزأ السلسلة الإحصائية إلى أجزاء متساوية (أربعة أجزاء)

1.1 تعريف :

- الربعي الأدنى Q_1 هو أصغر قيمة للنمط بحيث على الأقل 25% من حدود السلسلة المرتبة ترتيبا تصاعديا تملك قيما أصغر منه أو تساويه
- الربعي الأعلى Q_3 هو أصغر قيمة للنمط بحيث على الأقل 75% من حدود السلسلة المرتبة ترتيبا تصاعديا تملك قيما أصغر منه أو تساويه



2.1 تعيين الأرباع في حالة قيم النمط غير موزعة في فئات :

لتكن S سلسلة إحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا و N تكرارها الكلي

إذا كان $\frac{N}{4}$ عدد طبيعي فإن الربعي الأدنى Q_1 هو الحد الذي رتبته $\frac{N}{4}$ والربعي الأعلى Q_3 هو الحد الذي رتبته $\frac{3N}{4}$

- إذا كان : $\frac{N}{4}$ عدد ليس طبيعي فإن الربعي الأدنى Q_1 هو الحد الذي رتبته العدد الطبيعي الذي يلي مباشرة العدد $\frac{N}{4}$ والربعي الأعلى Q_3 هو الحد الذي رتبته العدد الطبيعي الذي يلي مباشرة العدد $\frac{3N}{4}$

◆ مثال

نعتبر السلسلة الإحصائية 1، 1، 2، 4، . . 6، 6، 6، 7، 7

التكرار الكلي لهذه السلسلة هو $N=9$

$\frac{3N}{4}=6{,}75$ و $\frac{N}{4}=\frac{9}{4}=2{,}25$

□ $\frac{N}{4}$ ليس طبيعي ومنه رتبة Q_1 هي 3 وتتمثل في 2 ونكتب $Q_1=2$

$\frac{3N}{4}$ ليس طبيعي ومنه رتبة Q_3 هي 7 وتتمثل في 6 ونكتب : $Q_3=6$

3.1 تعيين الأرباع في حالة قيم النمط موزعة في فئات:

عندما تكون السلسلة الإحصائية موزعة في فئات فإن:

- □ Q_1 هي القيمة الموافقة للتواتر المجمع الصاعد المساوي لـ: 0,25
- □ Q_3 هي القيمة الموافقة للتواتر المجمع الصاعد المساوي لـ: 0,75

تمرين تدريبي

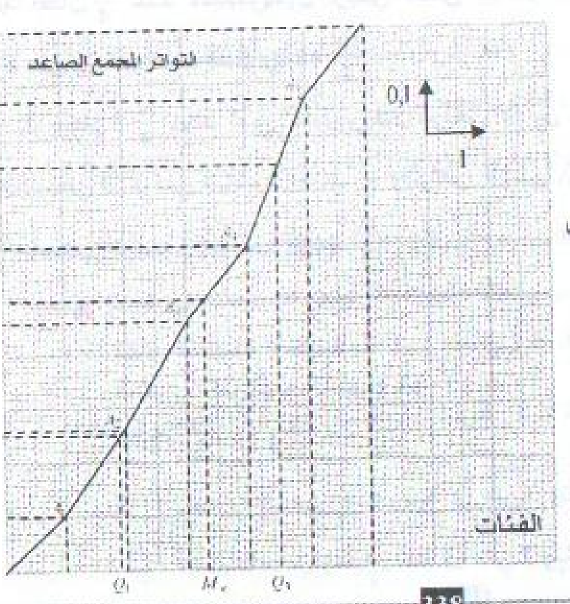
الجدول التالي يمثل توزيع تواترات والتواترات المجمعة الصاعدة لسلسلة إحصائية.

الفئات	[0,1[	[1,2[	[2,3[	[3,4[	[4,5[	[5,6[
التوترات f_i	0,10	0,16	0,20	0,14	0,27	0,13
التوترات المجمعة الصاعدة	0,10	0,26	0,46	0,60	0,87	1

1) أرسم منحنى التوترات المجمعة الصاعدة ثم عين الوسيط والربعيين الأدنى Q_1 والأعلى Q_3 من الشكل

2) عين الوسيط والربعيين الأدنى و الأعلى بالحساب

✓ الحل:



1) قيمة الوسيط هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y=0,5$ ومنحني التوترات المجمعة الصاعدة وتساوي تقريبا: $M_e=3,2$

- قيمة الربعي الأدنى Q_1 هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم ذوا المعادلة $y=0,25$ و منحنى التوترات المجمعة الصاعدة وتساوي تقريبا: $Q_1\approx1,9$

- قيمة الربعي الأعلى Q_3 هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y=0,75$ ومنحني التوترات المجمعة الصاعدة وتساوي تقريبا: $Q_3\approx4,50$

2) لتكن النقط: $A_1(1\,,0,1)$ ، $A_2(2\,,0,26)$ ، $A_3(3\,,0,46)$ ، $A_4(4\,,0,60)$ ، $A_5(5\,,0,87)$.

- ميل المستقيم (A_1A_2) هو: $\frac{0,26-0,1}{2-1}=0,16$

Q_1 هو فاصلة نقطة من $[A_1A_2]$ التي ترتيبها 0,25 ومنه: $\frac{0,26-0,25}{2-Q_1}=0,16$

منه نجد: $\frac{0,01}{2-Q_1}=0,16$

$\frac{0,01}{2-Q_1}=0,16$ تكافئ: $0,16(2-Q_1)=0,16$

تكافئ: $2-Q_1=\frac{0,01}{0,16}$ تكافئ: $2-Q_1=\frac{1}{16}$

تكافئ: $Q_1=2-\frac{1}{16}$ تكافئ: $Q_1=1,94$

- ميل المستقيم (A_3A_4) هو: $0,14=\frac{0,6-0,46}{4-3}$

M_e هو فاصلة نقطة من $[A_3A_4]$ التي ترتيبها 0,50 ومنه: $\frac{0,60-0,50}{4-M_e}=0,14$

منه نجد: $\frac{0,1}{4-M_e}=0,14$

$\frac{0,1}{4-M_e}=0,14$ تكافئ: $(4-M_e)\times0,14=0,1$

تكافئ: $4-M_e=\frac{0,1}{0,14}=\frac{10}{14}$

تكافئ: $M_e=4-\frac{10}{14}$ تكافئ: $M_e=3,28$

- ميل المستقيم $[A_4A_5]$ هو: $0,27=\frac{0,87-0,60}{5-4}$

Q_3 هو فاصلة نقطة من $[A_4A_5]$ ترتيبها يساوي 0,75

$\frac{0,87-0,75}{5-Q_3}=0,27$ منه نجد: $\frac{0,12}{5-Q_3}=0,27$

$\frac{0,12}{5-Q_3}=0,27$ تكافئ: $0,12=(5-Q_3)(0,27)$ تكافئ: $Q_3=\frac{123}{27}=4,55$

2 . العشريات

1.2 تعريف :

- العشري الأدنى D_1 هو أصغر قيمة للنمط بحيث على الأقل 10% من حدود السلسلة المرتبة تصاعديا تملك قيما أصغر منه أو تساويه .

- العشري الأعلى D_9 هو أصغر قيمة للنمط بحيث على الأقل 90% من حدود السلسلة المرتبة ترتيبا تصاعديا تملك قيما أصغر منه أو تساويه .

ملاحظة

كلما كان مدى السلسلة إحصائية كبيرا والتكرارات كبيرة تقسم السلسلة إلى عشرة مجالات جزئية تحتوي كل منهما على 10% من التكرارات هذا التقسيم يسمح لنا بالتعرف أكثر دقة على السلسلة . والحدود العليا لهذه المجالات تسمى الأعشار

2.2 تعيين العشريات في حالة قيم النمط غير موزعة في فئات :

لتكن S سلسلة إحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا و N تكرارها الكلي

- إذا كان $\frac{N}{10}$ عدد طبيعي فإن العشري الأدنى D_1 هو الحد الذي رتبته $\frac{N}{10}$ والعشري الأعلى D_9 هو الحد الذي رتبته $\frac{9N}{10}$

- إذا كان $\frac{N}{10}$ عددا ليس طبيعي فإن العشري الأدنى D_1 هو الحد الذي رتبته العدد الطبيعي الذي يلي مباشرة العدد $\frac{N}{10}$ والعشري الأعلى D_9 هو الحد الذي رتبته العدد الطبيعي الذي يلي مباشرة العدد $\frac{9N}{10}$.

مثال

لتكن السلسلة الإحصائية المبينة في الجدول التالي :

قيم النمط (x_i)	1	1,8	2	2,5	3	3,5	4	4,5
التكرارات (n_i)	3	12	18	13	14	1	5	11

عين D_1 و D_9 للسلسلة الإحصائية المعطاة

✓ **الحل :**

التكرار الكلي للسلسلة الإحصائية المعطاة هو : N

حيث : $N=3+12+18+13+14+1+5+11=77$

- نرتب السلسلة ترتيبا تصاعديا :

1 , 1 , 1 , 1,8 , 1,8 , 1,8 , 1,8 , 1,8 , 1,8 , 1,8 , 1,8 , 1,8 , 1,8 , 1,8 1,8 , 1,8

2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2 ,2 , 2 , 2 , 2 ,2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2

2,5 , 2,5 , 2,5 , 2,5 , 2,5 , 2,5 , 2,5

2,5 , 2,5 , 2,5 , 2,5 , 2,5 , 2,5 , 3 , 3 , 3 , 3 , 3 , 3 , 3 , 3 , 3 , 3 ,3 , 3

3 ,3 , 3 , 3,5 , 4 , 4 , 4 , 4 , 4 , 4,5 , 4,5 , 4,5 , 4,5 , 4,5 , 4,5 , 4,5 , 4,5 , 4,5

4,5 , 4,5

$\frac{N}{10}=\frac{77}{10}=7,7$ و منه D_1 هو الحد من السلسلة الذي رتبته 8 ويساوي 1,8 و نكتب $D_1=1,8$

$\frac{9N}{10}=69,3$ ومنه D_9 هو الحد الذي رتبته 70 وتساوي 4,5 و نكتب : $D_9=4,5$

3.2 تعيين العشريات في حالة قيم النمط موزعة في فئات :

عندما تكون السلسلة الإحصائية موزعة في فئات فإن D_1 هي القيمة الموافقة للتواتر المجمع الصاعد المساوي لـ: 0,1 و D_9 هي القيمة الموافقة للتواتر لمجمع الصاعد يساوي لـ 0,9 .

تمرين تدريبي

الجدول التالي يمثل توزيع التوترات والتوترات المجمعة الصاعدة لسلسلة إحصائية .

الفئات	[0,1[	[1,2[	[2,3[	[3,4[	[4,5[	[5,6[
التوترات (f_i)	0,10	0,16	0,20	0,14	0,27	0,13
التوترات المجمعة الصاعدة	0,10	0,26	0,46	0,60	0,87	1

1) أرسم منحى التوترات المجمعة الصاعدة ثم عين D_1 و D_9 من الشكل

2) عين حسابيا D_1 و D_9

✓ الحل :

1) قيمة D_1 هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = 0,1$ ومنحنى التوترات المجمعة الصاعدة وتساوي تقريبا : $D_1 = 1$

- قيمة D_9 هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = 0,9$ ومنحى التوترات المجمعة الصاعدة وتساوي تقريبا : $D_9 \approx 5,2$

2) لتكن النقطتين $A_1(5 , 0,87)$ و $A_2(6 , 1)$ من منحى التوترات المجمعة الصاعدة

ميل المستقيم $(A_1 A_2)$ هو:

$$\frac{1-0,87}{6-5} = \frac{0,13}{1} = 0,13$$

D_9 هو فاصلة نقطة من القطعة $[A_1 A_2]$ التي ترتيبها يساوي : 0,9

ومنه : $\frac{1-0,9}{6-D_9} = 0,13$

$$\frac{1-0,9}{6-D_9} = 0,13$$

يكافئ : $\frac{0,1}{6-D_9} = 0,13$

يكافئ : $(6-D_9) \times 0,13 = 0,1$

يكافئ : $D_9 = 5,24$

3 . خواص الأرباع

1.3 المجال الربعي :

المجال الربعي هو المجال $[Q_1 , Q_3]$ ، ويسمى العدد : $I = Q_3 - Q_1$ بالانحراف الربعي

ملاحظة

المجال الربعي يهمل القيم الواقعة على أطراف السلسلة الإحصائية عكس المدى لأن هذه القيم قد تكون مشكوك فيها . وتعينه سهل لكن يأخذ بالحسبان سوى 50% من التكرار مما لا يعطينا المعلومات الكاملة عن السلسلة الإحصائية .

يمكن تلخيص سلسلة إحصائية باستعمال الثنائية (الوسيط ، المجال الربعي)

مثال ◆

لتكن السلسلة الإحصائية التالية :

قيم النمط	2	3	5	11
التكرار	5	5	5	6

رتب السلسلة الإحصائية ترتيبا تصاعديا .

ثم أحسب قيمة الوسيط ، Q_1 ، Q_3 معينا عند ندا قيمة الانحراف الربعي

✓ الحل :

2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 3 , 3 , 3 , 3 , 3 , 5 , 5 , 5 , 5 , 5 , 11 , 11 , 11 , 11 , 11 , 11

التكرار الكلي لهذه السلسلة هو : $N = 21$

الوسيط M_e يقسم التكرار الكلي إلى قسمين بحيث : 50 % على الأقل من التكرارات ، قيم أنماطها تكون أصغر أو تساوي M_e وعلى الأقل 50 % من التكرارات قيم أنماطها أكبر منه أو تساويه .

- بما أن $N = 21$ فإن الوسيط رتبته : $\frac{N+1}{2} = 11$ ومنه قيمته هي 5 وتكتب $M_e = 5$

- بما أن $\frac{N}{4} = 5,25$ فإن رتبته Q_1 هي 6 وقيمته 3 وتكتب : $Q_1 = 3$

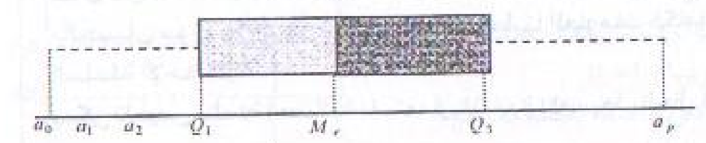
- بما أن : $\frac{3N}{4} = 15,75$ فإن رتبة Q_3 هي 16 وقيمته 11 ونكتب : $Q_3 = 11$

- المجال الربعي هو : $[3 , 11] - [Q_1 , Q_3]$ والانحراف الربعي : $I = Q_3 - Q_1 = 8$

2.3 المخططات بالعلب :

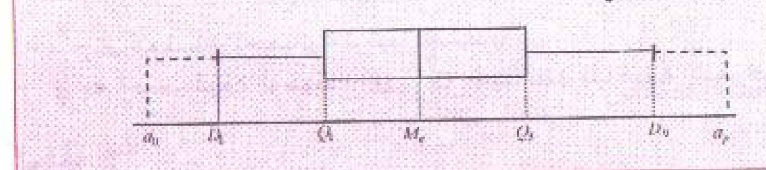
المخطط بالعلبة لسلسلة إحصائية هو مخطط يجمع بين الوسيط والربعي الأدنى Q_1 والربعي الأعلى Q_3 يتم إنشاؤه بالكيفية التالية

- نعلم قيم النمط على محور عمودي (أو أفقي)
- نضع على هذا المحور أدنى وأعلى قيمة للسلسلة والربعي الأدنى والأعلى و الوسيط
- ونرسم عندئذ مستطيل (علبة) موازي للمحور بحيث طوله هو : $l = Q_3 - Q_1$ وعرضه كيفي.



ملاحظة

1) إذا وضعنا على هذا المحور العشري الأدنى D_1 العشري الأعلى D_9 نتحصل عندئذ على مخطط بالعلبة لسلسلة يجمع بين D_1 , D_9 , M_e و Q_1 و Q_3 كما يلي :



ملاحظة

هذا المخطط السهل الإنشاء يسمح لنا بمعاينة التشتت لتوزيع سلسلة إحصائية وكذا المقارنة بين عدة سلاسل إحصائية .

مثال

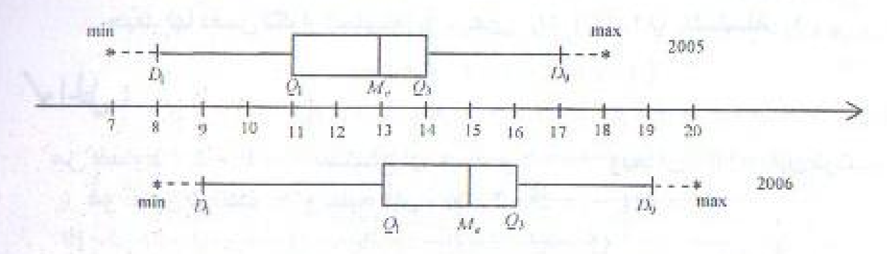
قام مخبر لعلم الأوبئة بإحصاء يومي لعدد الأشخاص المصابين بعدوى مرض الزكام في فصل الشتاء لسنتين 2005 و 2006 من هاتين السلسلتين الإحصائيتين استخرجنا المؤشرات المدونة في الجدول التالي:

	D_1	Q_1	M_e	Q_3	D_9	min (الطرف الأدنى)	max (الطرف الأعلى)
شتاء 2005	08	11	13	14	17	07	18
شتاء 2006	09	13	15	16	19	8	20

أرسم مخطط بالعلبة للسلسلتين الإحصائيتين ثم قارن بينهما

✓الحل :

مخطط بالعلبة لكل سلسلة من لسلسلتين كما هو مبين في الشكل التالي:



تشتت السلسلتين الإحصائيتين متشابهة (نفس طول المستطيل) لكن العلبتين متباعدتين ، بحيث نلاحظ 75 % من أيام شتاء 2006 كان فيهما عدد المصابين بالزكام أكبر من 75 % من أيام شتاء 2005 .

3.3 تعيين أرباع سلسلة إحصائية مرتبطة بدالة تألفية مع سلسلة إحصائية أخرى معلوم أرباعها

□ **مبرهنة**

S_1 هي السلسلة الإحصائية (x_i , n_i) وسيطها M_e وربعيها Q_1 و Q_3 .

S_2 السلسلة الإحصائية (y_i , n_i) لها نفس تكرار S_1 بحيث من أجل كل $1 \le i \le p$ ، $y_i = ax_i + b$ مع $a \in IR^*$ و $b \in IR$

وليكن M'_e ، Q'_1 ، Q'_3 على التوالي الوسيط والربعين الأدنى والأعلى لسلسلة S_2 عند ئذ لدينا :

$M'_e = aM_e + b$ ومن اجل $a > 0$: $Q'_1 = aQ_1 + b$ و $Q'_3 = aQ_3 + b$

□ **الإثبات**

نسمي f الدالة $x \mapsto ax + b$ إذا من الفرضية لدينا : $y_i = f(x_i)$

بما أن : $a > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما أي إذا كان : $x_i \le x_{i+1}$ فإن :

$f(x_i) \le f(x_{i+1})$

أي أن $y_i \le y_{i+1}$ وهذا يعني أن قائمة السلسلة الإحصائية S_2 مرتبة بنفس ترتيب S_1 أي القيمة y_i مرتبة بنفس ترتيب x_i وعليه Q_1 و Q'_1 ، Q_3 و Q'_3 لهما نفس الترتيب في السلسلتين إذن:

$Q'_1 = aQ_1 + b$ و $Q'_3 = aQ_3 + b$

مثال ◆

S_1 سلسلة إحصائية ذات النمط x_i وسيطها $M_e = 7$ والربعين الأدنى Q_1 والأعلى Q_3 هما : 3 ، 10 على الترتيب .

نعتبر S_2 السلسلة الإحصائية ذات النمط y_i بحيث : $y_i = 4x_i - 2$

حيث لها نفس تكرار السلسلة S_1 ، عين M_e' ، Q_1' ، Q_3' للسلسلة S_2

✓ الحل :

من المساواة : $y_i = 4x_i - 2$ نستنتج أن $a = 4$ و $b = -2$ وبما أن : $a \rangle 0$ فإن ترتيب y_i هو نفس ترتيب x_i و عليه فإن : $M_e' = 4M_e - 2 = 28 - 2 = 26$

$Q_3' = 4Q_3 - 2 = 40 - 2 = 38$ ، $Q_1' = 4Q_1 - 2 = 12 - 2 = 10$

4 . الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية

الوسط الحسابي للقيم : x_1 ، x_2 ، ...... x_p التي تكراراتها على الترتيب : n_1 ، n_2 ،...، n_p

حيث : $n = n_1 + n_2 + ... + n_p$ هو العدد الحقيقي $\bar{x}$ المعرف بـ:

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_p x_p}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i = \sum_{i=1}^{i=p} f_i x_i \quad \text{حيث :} \quad f_i = \frac{n_i}{N}$$

ملاحظة

في حالة السلسلة الإحصائية مبوبة في شكل فئات فإن قيم x_i هي مركز الفئات .

□ خاصية

الوسط الحسابي $\bar{x}$ هو العدد الحقيقي الذي من أجله الدالة : $x \mapsto \sum_{i=1}^{i=p} n_i (x_i - x)^2$ تبلغ قيمتها الصغرى .

□ الإثبات :

لتكن الدالة f المعرفة على IR بـ: $f(x) = \sum_{i=1}^{i=p} n_i (x_i - x)^2$

$$f(x) = n_1 (x_1 - x)^2 + n_2 (x_2 - x)^2 + ... + n_p (x_p - x)^2$$

لنعتبر الدالة f_i المعرفة على IR بـ: $f_i(x) = n_i (x_i - x)^2$

الدالة f_i قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من أجل كل $x \in IR$:

$$f_i'(x) = -2n_i(x_i - x)$$

$$f_i'(x) = -2n_1(x_1 - x) - 2n_2(x_2 - x) - .... - 2n_p(x_p - x)$$

$$= 2(n_1 + n_2 + ... + n_p)x - 2(n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_p x_p)$$

$$= 2Nx - 2N\bar{x} = 2N(x - \bar{x})$$

لأن : $n_1 + n_2 + ... + n_p = N$ و $n_1 x_1 + ... + n_p x_p = N\bar{x}$

x	$-\infty$ $\bar{x}$ $+\infty$
إشارة $f'(x)$	$-$ 0 $+$
تغيرات f	↘ $f(\bar{x})$ ↗

إذن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى من أجل $x = \bar{x}$

5 . الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة – التباين والانحراف المعياري

1.5 الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة

في هذه الفقرة نريد تعيين قيمة التشتت لمجموعة الحدود x_i لسلسلة إحصائية متمركزة حول $\bar{x}$.

المسافة $|x_i - \bar{x}|$ تسمى الانحراف المطلق وهي تعبر عن المسافة بين x_i و $\bar{x}$

الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة يعطى بالعلاقة التالية :

$$e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{N}\left(n_1 |x_1 - \bar{x}| + ... + n_p |x_p - \bar{x}|\right) = f_1 |x_1 - \bar{x}| + ... + f_p |x_p - \bar{x}|$$

يعطينا فكرة جيدة عن تشتت السلسلة لكن تطبيقاته في الإحصاء الرياضي قليلة

مثال ◆

أحسب الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة للسلسلة الإحصائية التالية:

x_i	2	4	6	8	10	12
f_i	0,08	0,15	0,28	0,35	0,10	0,04

✓الحل :

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{i=6} f_i\, x_i = 2\times0{,}08+4\times0{,}15+6\times0{,}28+8\times0{,}35+10\times0{,}1+12\times0{,}04=6{,}72$$

$$e_m = f_1\left|x_1-\bar{x}\right|+f_2\left|x_2-\bar{x}\right|+f_3\left|x_3-\bar{x}\right|+f_4\left|x_4-\bar{x}\right|+f_5\left|x_5-\bar{x}\right|+f_6\left|x_6-\bar{x}\right|$$
$$=0{,}08\left|2-6{,}72\right|+0{,}15\times\left|4-6{,}72\right|+0{,}28\left|6-6{,}72\right|+0{,}35\left|8-6{,}72\right|+0{,}1\left|10-6{,}72\right|$$
$$+0{,}04\left|12-6{,}72\right| =1{,}97$$

2.5 التباين والانحراف المعياري

تباين سلسلة إحصائية هو العدد الحقيقي V المعرف بـ :

$$V=\frac{1}{N}\left[n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+....+n_p(x_p-\bar{x})^2\right]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p}n_i(x_i-\bar{x})^2$$

أو أيضا : $V=\sum_{i=1}^{i=p} f_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2$ و الانحراف المعياري لسلسلة إحصائية هو: $S=\sqrt{V}$

ملاحظة

1) الانحراف المعياري يقيس تشتت قيم سلسلة إحصائية متمركزة حول الوسط الحسابي $\bar{x}$

- كلما كانت هذه القيم متشتة كلما كان S كبيرا

2) الانحراف يتغير بشكل ملحوظ كلما غيرنا في قيم المتطرفة للسلسلة الإحصائية

3)يمكن تلخيص سلسلة إحصائية بواسطة الثنائية(الوسط الحسابي ، الانحراف المعياري)

مثال

قامت لجنة المراقبة التقنية للبناء CTC بتحقيق على أثر زلازل بومرداس حول البنيات المهدمة فتحصلنا على الجدول التالي الذي يربط بين المساحة وعدد البنيات المهدمة .

المساحة (m^2)	$[40,50[$	$[50,60[$	$[60,70[$	$[70,80[$
عدد البنيات المهدمة	360	130	90	100

عين الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه السلسلة الإحصائية

✓الحل :

نقوم بتعيين مراكز الفئات x_i وهي على التوالي 45 ، 55 ، 65 ، 75 .

□ الوسط الحسابي $\bar{x}$ هو : $\bar{x}=\frac{x_1n_1+x_2n_2+x_3n_3+x_4n_4}{n_1+n_2+n_3+n_4}$

$$x=\frac{45\times360+55\times130+65\times90+75\times100}{680}=53{,}97$$

□ الانحراف المعياري هو S حيث : $S=\sqrt{V}$

$$V=\frac{1}{N}\left[n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+n_3(x_3-\bar{x})^2+n_4(x_4-\bar{x})^2\right]$$

$$V=\frac{1}{680}\left[360(45-53{,}97)^2+130(55-53{,}97)^2+90(65-53{,}97)^2+100(75-53{,}97)^2\right]$$

$$V=\frac{1}{680}\times84297{,}412=123{,}94$$

إذن : $S=\sqrt{123{,}94}\approx11{,}13$

تمرين تدريبي

قمنا برصد درجة الحرارة بالدرجات على الساعة 12 سا في أيام شهر جوان فتحصلنا على النتائج المدونة في الجدول التالي:

درجة الحرارة	25	26	27	28	29	30	31
عدد الأيام	1	4	5	7	6	4	3

1) احسب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لهذه السلسلة

2) عوض تدوين 20 درجة دونا 25 درجة كيف تصبح قيمة الوسط الحسابي والانحراف المعياري باستبدال 25 ب 20 ، ماذا تستنتج ؟

✓الحل :

1) الوسط الحسابي للسلسلة الإحصائية هو : $\bar{x}$ حيث :

$$\bar{x}=\frac{x_1n_1+x_2n_2+x_3n_3+x_4n_4+x_5n_5+x_6n_6+x_7n_7}{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7}$$

$$\bar{x}=\frac{25\times1+26\times4+27\times5+28\times7+29\times6+30\times4+31\times3}{30}=\frac{847}{30}=28{,}23$$

- الانحراف المعايرة هو : S حيث : $S=\sqrt{V}$

$$V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=7} n_i (x_i-\bar{x})^2$$

$$=\frac{1}{30}\Big[(25-28{,}23)^2+4(26-28{,}23)^2+5(27-28{,}23)^2+7(28-28{,}23)^2+6(29-28{,}23)^2$$

$$+4(30-28{,}23)^2+3(31-28{,}23)^2\Big]$$

$$=\frac{1}{30}[57{,}35]=1{,}91$$

منه: $S=\sqrt{V}=\sqrt{1{,}91}\simeq 1{,}38$

2) نسمي $\bar{x}'$ و S' الوسط الحسابي والانحراف المعياري للسلسلة الجديدة على التوالي :

$$\bar{x}'=\frac{x_1' n_1+x_2 n_2+x_3 n_3+x_4 n_4+x_5 n_5+x_6 n_6+x_7 n_7}{n_1+n_2+....+n_7}$$

$$\bar{x}'=\bar{x}-\frac{x_1 n_1}{N}+\frac{x_1' n_1}{N}=28{,}23-\frac{25\times 1}{30}+\frac{20}{30}=28{,}23-\frac{5}{30}=28{,}06$$

☐ الانحراف المعياري S' :

$$V'=V-\frac{1}{30}(x_1-\bar{x})^2+\frac{1}{30}(x_1'-\bar{x})^2=1{,}91-\frac{1}{30}(25-28{,}23)^2+\frac{1}{30}(20-28{,}23)^2$$

$$=1{,}91-\frac{1}{30}\times 3{,}23^2+\frac{1}{30}\times 8{,}23^2=1{,}91-1{,}909=0{,}01$$

إذن : $S'=\sqrt{0{,}01}=0{,}1$

نلاحظ أن الانحراف المعياري يتعلق كثيرا بالقيم المتطرفة للسلسلة الإحصائية

☐ خواص مؤشرات التشتت :

خاصية 1 :

لتكن A السلسلة الإحصائية $(x_i\ ,\ n_i)$ ذات الربعين الأدنى و الأعلى Q_1 و Q_3 على الترتيب.

B السلسلة الإحصائية $(y_i\ ,\ n_i)$ بحيث من أجل كل : $p\geq i\geq 1$: $y_i=a\,x_i+b$ مع $a>0$.

- إذا كان I_x الانحراف الربعي للسلسلة A فإن الانحراف الربعي لسلسلة B هو I_y يعطى بـ: $I_y=aI_x$.

☐ الإثبات :

- بما أن $y_i=a\,x_i+b$ و $a>0$ و Q_1 و Q_3 الربعين الأدنى و الأعلى للسلسلة A فإن الربعين Q_1' و Q_3' للسلسلة B يعطى بـ: $Q_1'=aQ_1+b$ و $Q_3'=aQ_3+b$

$$I_y=Q_3'-Q_1'=(aQ_3+b)-(aQ_1+b)=aQ_3-aQ_1=aI_x$$

خاصية 2

A سلسلة إحصائية ذات التباين V إذن :

$$V=\frac{1}{N}\left(n_1x_1^2+n_2x_2^2+....+n_px_p^2\right)-\bar{x}^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2-\bar{x}^2$$

☐ الإثبات :

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i\left(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2\right)$$

$$V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i (x_i-\bar{x})^2$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=1}\left(n_ix_i^2-2n_ix_i\bar{x}+n_i\bar{x}^2\right)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_ix_i^2-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} 2n_ix_i\bar{x}+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\bar{x}^2$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i^2-\frac{1}{N}2\bar{x}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i+\frac{1}{N}N\bar{x}^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i^2-\frac{2}{N}\bar{x}\times N\bar{x}+\frac{1}{N}N\bar{x}^2$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i^2-\bar{x}^2$$

خاصية 3

ليكن S_x الانحراف المعياري للسلسلة الإحصائية ذات القيم x_i و : $p\geq i\geq 1$ و S_y الانحراف المعياري لسلسلة الإحصائية ذات القيم y_i و $y_i=ax_i+b$ مع a و b عددين حقيقين و $a\neq 0$ عند ئذا : $S_y=|a|S_x$ و $V_y=a^2V_x$.

☐ الإثبات :

ليكن $\bar{x}$ و $\bar{y}$ المتوسطان الحسابيان للسلسلتين ذات القيم x_i و y_i على التوالي :

نعلم أن : $\bar{y}=a\bar{x}+b$ إذن : $V_y=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(y_i-\bar{y})^2$

$$V_y=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(ax_i+b-a\bar{x}-b)^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\left[a(x_i-\bar{x})\right]^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_ia^2(x_i-\bar{x})^2$$

$$= a^2 \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \bar{x} \right)^2$$

ومنه: $V_y = a^2 V_x$ بجذر طرفي المساواة : $V_y = a^2 V_x$ نجد : $\sqrt{V_y} = |a| \sqrt{V_x}$ اي :

$S_y = |a| S_x$

تمرين تدريبي

في ثانوية متوسط معدلات البكالوريا في 2004 هو 9,60 والانحراف المعياري هو 2,70

1) إذا زادت معدلات التلاميذ بنسبة 5% في سنة 2005 أحسب متوسط المعدلات والانحراف المعياري لمعدلات البكالوريا في سنة 2005

2) إذ زادت المعدلات بـ: 0,5 عما كانت عليه في سنة 2004 فأحسب عند ئذ متوسط المعدلات والانحراف المعياري الجديدين ، ما هي الحالة التي تزيد في تشتت المعدلات .

✓ الحل :

1) إذا كان x هو معدل البكالوريا لسنة 2004 فإن معدل البكالوريا لسنة 2005 هو $y = 1{,}05\, x$

وبالتالي متوسط المعدلات لسنة 2005 هو $\bar{y}$ حيث $\bar{y} = 1{,}05\bar{x}$ و $\bar{x}$ متوسط المعدل لسنة 2004

$$\bar{y} = 1{,}05\, \bar{x} = 1{,}05 \times 9{,}60 = 10{,}08$$

☐ حساب الانحراف المعياري

لدينا: $V_Y = (1{,}05)^2 V_x$ منه ، $S_Y = |1{,}05|\, S_x$ بالتعويض نجد :

$$S_Y = 1{,}05 \times 2{,}70 = 2{,}83$$

2) إذا كان x هو معدل البكالوريا لسنة 2004 فإن معدل البكالوريا لسنة 2005 هو $y = x + 0{,}5$ وبالتالي متوسط المعدلات لسنة 2005 هو $\bar{y}$ حيث :

$$\bar{y} = \bar{x} + 0{,}5 = 9{,}60 + 0{,}5 = 10{,}10$$

☐ حساب الانحراف المعياري :

لدينا : $V_Y = a^2 V_x = V_x$ لأن : $a = 1$ وبالتالي : $S_Y = S_x$

المقارنة : نلاحظ في الحالة الأولى أن التشتت يزداد لأن الانحراف المعياري ازداد . أما في الحالة الثانية فالتشتت ثابت .

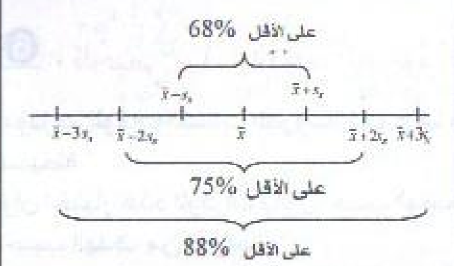
6 - تلخيص سلسلة إحصائية بمؤثراتها

مؤثرات الموقع والتشتت المدروسة تسمح لنا بتلخيص سلسلة إحصائية بكيفية بسيطة

وإن اختيار هذه المؤثرات يكون حسب الوضعية التي نحن بصدد التعامل معها أي حسب الهدف من الدراسة .

التلخيص الممكن لسلسلة إحصائية	النتائج
1) تلخيص سلسلة بواسطة الثنائية (الوسيط ، المدى) - هذا النوع من التلخيص سهل وبسيط لكن لا يعطينا فكرة عن وضعية القيمتين المتطرفتين بالنسبة إلى الوسيط . - المدى مؤثر متذبذب لأنه متعلق بالقيم المتطرفة .	- على منحنى التوترات المجمعة الصاعدة معرفة بعض المؤثرات (القيمة المتطرفة والربعين) يسمح لنا بتعيين النقاط من هذا المنحني - مثلا : إذا كونا نعلم القيم المتطرفة والوسيط عندئذ نعلم ثلاث نقط من منحنى التوترات المجمعة فقط. a_0 M_e a_p
2) تلخيص سلسلة بواسطة الثنائية (الوسيط ، الانحراف الربعي) هذا النوع من التلخيص دقيق بالنسبة إلى الأول لأنه غير متعلق بالقيم المتطرفة للسلسلة إحصائية	هذه المؤثرات تسمح لنا بتعيين خمسة نقط على منحنى التوترات المجمعة الصاعدة ومخطط العلبة يسمح لنا بمعاينة السلسلة الإحصائية ومقارنة سريعة لسلاسل إحصائية . 0,75 0,5 0,25 a_0 Q_1 M_e Q_3 a_p
3) تلخيص سلسلة بواسطة القيم المتطرفة والربعين والوسيط - هذا النوع من التلخيص يسمح لنا بإنشاء مخطط العلب الذي يسمح لنا بمعاينة التشتت لتوزيع سلسلة إحصائية وكذا المقارنة بين عدة سلاسل إحصائية - الشيء السلبي في استعمال هذه المؤثرات هو أن معرفتها لا تسمح لنا بحساب مؤثرات تجميع عدة سلاسل إحصائية	

4) الثنائية (الوسط الحسابي ، الانحراف المعياري)
هذا النوع من التلخيص يسمح لنا بقيام حسابات عند تجميع عدة سلاسل إحصائية
ومن جهة أخرى المجالات المعينة بواسطة الوسط و الانحراف المعياري تسمح بأخذ فكرة عن توزيع التكرار وهي الثنائية المفضلة عند الاحصائين



7 . تجميع سلسلتين

نعتبر السلسلتين الإحصائيتين الأولى تكرارها N_1 ووسطها الحسابي m_1 و إنحرافها المعياري S_1 والثانية تكرارها N_2 ووسطها الحسابي m_2 وانحرافها المعياري S_2 وليكن m الوسط الحسابي لمجموع السلسلتين (إتحاد السلسلتين) و S انحرافها المعياري

1) أوجد m بدلالة m_1 و m_2

2) أوجد علاقة التي تسمح بحساب S^2 بدلالة S^2_1 و S^2_2 و m_1 و m_2

✓ الحل :

1) لدينا: $m=\frac{N_1 m_1}{N_1+N_2}+\frac{N_2 m_2}{N_1+N_2}$

بما أن تكرار السلسلة الجديدة هو : $N=N_1+N_2$ فإن : $m=\frac{N_1}{N}m_1+\frac{N_2 m_2}{N}$

2)
$$S^2{}_1=V_1=\frac{1}{N_1}\sum n_i x^2{}_i-m^2{}_1 \quad .....(1)$$

$$S^2{}_2=V_2=\frac{1}{N_2}\sum n'_i x^2{}_i-m^2{}_2 \quad ......(2)$$

بضرب (1) في $\frac{N_1}{N_1+N_2}$ وبضرب (2) في $\frac{N_2}{N_1+N_2}$ نجد :

$$V_1\frac{N_1}{N}=\frac{1}{N}\sum n_i x^2{}_i-\frac{N_1}{N}m_1^2 \quad ......(3)$$

$$V_2\frac{N_2}{N}=\frac{1}{N}\sum n'_i x^2{}_i-\frac{N_2}{N}m^2{}_2 \quad ....(4)$$

بجمع (3) و (4) طرف لطرف نجد :

$$V_1\frac{N_1}{N}+V_2\frac{N_2}{N}=\frac{1}{N}\sum\left(n_i+n'_i\right)x^2{}_i-\frac{N_1}{N}m_1^2-\frac{N_2}{N}m^2{}_2 \quad ....(5)$$

بما أن : $n_i+n'_i=N_i$ فإن المساواة (5) تصبح كما يلي :

$$V_1\frac{N_1}{N}+V_2\frac{N_2}{N}=\frac{1}{N}\sum N_i x^2{}_i-\frac{N_1}{N}m^2{}_1-\frac{N_2}{N}m^2{}_2$$

$$V_1\frac{N_1}{N}+V_2\frac{N_2}{N}=\frac{1}{N}\sum N_i x^2{}_i-m^2+m^2-\frac{N_1}{N}m^2{}_1-\frac{N_2}{N}m^2{}_2$$

$$V_1\frac{N_1}{N}+V_2\frac{N_2}{N}=V+m^2-\frac{N_1}{N}m^2{}_1-\frac{N_2}{N}m_2{}^2$$

إذن : $V=\left(\frac{V_1 N_1}{N}+V_2\frac{N_2}{N}\right)-m^2+\frac{N_1}{N}m^2{}_1+\frac{N^2}{N}m^2{}_2$

$$-m^2+\frac{N_1}{N}m^2{}_1+\frac{N_2}{N}m_2{}^2=-\left[\frac{N_1}{N}m_1+\frac{N_2}{N}m_2\right]^2+\frac{N_1}{N}m^2{}_1+\frac{N}{N}m^2{}_2$$

$$=-\left(\frac{N^2{}_1 m^2{}_1}{N^2}-\frac{N_1 m^2{}_1}{N}\right)-\left(\frac{N^2{}_2 m^2{}_2}{N^2}-\frac{N_2 m^2{}_2}{N}\right)-\frac{2N_1 N_2 m_1 m_2}{N^2}$$

$$=-\frac{N_1 m^2{}_1}{N}\left(\frac{N_1}{N}-1\right)-\frac{N_2 m^2{}_2}{N^2}\left(\frac{N_2}{N}-1\right)-\frac{2N_1 N_2 m_1 m_2}{N^2}$$

$$=\frac{m_1{}^2 N_1 N_2}{N^2}+\frac{N_1 N_2 m^2{}_2}{N^2}-\frac{2N_1 N_2 m_1 m_2}{N^2}$$

$$=\frac{N_1 N_2}{N^2}\left[m^2{}_1+m^2{}_2-2m_1 m_2\right]=\frac{N_1 N_2}{N^2}(m_1-m_2)^2$$

لأن : ($N=N_1+N_2$ و $\frac{N_1}{N}-1=-\frac{N_2}{N}$ و $\frac{N_2}{N}-1=-\frac{N_1}{N}$)

ومنه : $V=\frac{N_1}{N}V_1+\frac{N_2}{N}V_2+\frac{N_1 N_2}{N^2}(m_1-m_2)^2$

أي : $S^2=\frac{N_1}{N}S^2{}_1+\frac{N_2}{N}S^2{}_2+\frac{N_1 N_2}{N^2}(m_1-m_2)^2$

تمرين تدريبي

في مؤسسة تربوية عدد عمالها 130 عاملا ، توزيع أجورهم بالاف الدينارات معطى في الجدول التالي :

الفئات	[6,9[	[9,12[	[12,15[	[15,18[	[18,21[	[21,24[	[24,27[	[27,30[
تكرار الأساتذة	1	2	3	4	10	17	21	12
تكرار عمال الادراين والصيانة	18	22	13	4	2	1	0	0

1) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل سلسلة
2) أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لسلسلة الأجور كل عمال المؤسسة .

الحل :

ليكن m_1 و S_1 الوسيط الحسابي والانحراف المعياري للسلسلة الأولى (الأساتذة) و N_1 تكرارها وليكن m_2 و S_2 الوسيط الحسابي والانحراف المعياري للسلسلة الثانية و N_2 تكرارها

1) $$m_1 = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 + ... + n_8 x_8}{N_1}$$

حيث : x_i هي مركز الفئات و n_i تكرار الفئات

$$m_1 = \frac{1590}{70} = 22,71 \quad ، \quad m_2 = \frac{n'_1 x_1 + n'_2 x_2 + ... + n'_8 x_8}{N_2} = \frac{669}{60} = 11,15$$

$$V_1 = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{i=8} n_i x_i^2 - m_1^2 = \frac{1}{70}\left(n_1 x_1^2 + ... + n_8 x_8^2\right) - m_1^2 = 538,90 - 515,74 = 23,16$$

$$V_2 = \frac{1}{N_2}\sum_{i=1}^{i=8} n'_i x_i^2 - m_2^2 = \frac{1}{60}\left[n'_1 x_1^2 + n'_2 x_2^2 + ... + n'_8 x_8^2\right] - m_2^2 = 11,72$$

إذن : $S_1 = \sqrt{V_1} = 4,81$ $S_2 = \sqrt{V_2} = 3,42$

نلاحظ أن قيمة S_1 أكبر من S_2 مما يدل على أن السلسلة الأولى أكثر تشتت

2) ليكن : m الوسط الحسابي لسلسلة الجديدة : $m = m_1\frac{N_1}{N} + m_2\frac{N_2}{N}$

حيث : $N_1 = 70$ و $N_2 = 60$ و $N = N_1 + N_2 = 130$

$$m = \frac{22,71\times 70}{130} + \frac{6,65\times 60}{130} = \frac{1988,7}{130} = 15,29$$

ليكن S الانحراف المعياري لسلسلة الجديدة لدينا :

$$S^2 = \frac{N_1}{N}S_1^2 + \frac{N_2}{N}S_2^2 + \frac{N_1 N_2}{N^2}(m_1 - m_2)^2$$

$$S^2 = \frac{70}{130}\times(4,81)^2 + \frac{60}{130}(3,42)^2 + \frac{60\times 70}{130^2}(22,71 - 11,15)^2$$

$$= 17,88 + 33,21 = 51,09$$

ومنه فإن $S = 7,14$

نلاحظ أن $S \rangle S_1$ و $S \rangle S_2$ وبالتالي السلسلة الجديدة هي أكثر تشتت من السلسلتين السابقتين.

تطبيقات نموذجية

تطبيق . 1 : تعيين رتبة الربعين الأدنى والأعلى

في كل حالة من الحالات التالية تعطي تكرار عينية من مجتمع بحيث هذه العينة مرتبة ترتيبا تصاعديا حسب قيم النمط المدروس
عين رتبة كل من الربعين الأدنى و الأعلى
أ) 136 شخص ب) 255 شخص ج) 70 شخص د) 449 شخص

الحل :

أ) $N = 136$ ومنه ، $\frac{N}{4} = 34$ ، $\frac{N}{4}$ عدد طبيعي وبالتالي رتبت الربعي الأدنى Q_1 هي 34

$\frac{3N}{4} = 102$ ومنه فإن رتبة الربعي الأعلى Q_3 هي 102

ب) $N = 255$ ومنه $\frac{N}{4} = 63,75$ ، $\frac{N}{4}$ ليس عدد طبيعي وبالتالي رتبة الربعي الأدنى Q_1 هي 64 ، $\frac{3N}{4} = 191,25$ ليس عدد طبيعي ومنه رتبة Q_3 هي 192.

ج) $N = 70$ ومنه $\frac{N}{4} = 17,5$ ؛ $\frac{N}{4}$ ليس طبيعيا ومنه رتبة Q_1 هي 18 ، $\frac{3N}{4} = 52,5$ ومنه رتبة Q_1 هي 53 .

د) $N = 449$ منه ، $\frac{N}{4} = 112,25$ ومنه رتبة Q_1 هي 113

$\frac{3N}{4} = 336,75$ ومنه رتبة Q_3 هي 337.

تطبيق . 2 : تعيين قيمة الوسيط و الربعين الأدنى والأعلى

عين الوسيط والربعين الأدنى والأعلى للسلاسل الإحصائية التالية :
1) 1 , 9 , 17 , 17 , 12 , 12 , 20 , 13 , 12 , 26 , 26 , 8 , 8 , 23 , 15 , 9
2) 45 , 31 , 7 , 17 , 38 , 3 , 2 , 7 , 12
3) 11 , 5 , 19 , 7 , 1 , 0 , 9 , 16

✓ **الحل :**

1) نقوم بترتيب هذه السلسلة ترتيبا تصاعديا حسب قيم النمط المدروس فنتحصل على :
1 , 8 , 8 , 9 , 9 , 12 , 12 , 12 , 13 , 15 , 17 , 17 , 20 , 23 , 26 , 26
تكرار الكلي لهذه السلسلة هو : $N = 16$

$\frac{N}{4} = 4$ ومنه رتبة Q_1 هي 4 وبالتالي $Q_1 = 9$

$\frac{3N}{4} = 12$ ومنه رتبة Q_3 هي 12 بالتالي : $Q_3 = 17$

$\frac{N}{2} = 8$ ومنه رتبة الوسيط M_e هي 8 بالتالي $M_e = 12$

2) نقوم بترتيب هذه السلسلة ترتيبا تصاعديا حسب قيم النمط المدوس فتحصل على :
2 , 3 , 7 , 7 , 12 , 17 , 31 , 38 , 45 ؛ تكرار الكلي لهذه السلسلة هو : $N = 9$

$\frac{N}{2} = 4,5$ ومنه رتبة الوسيط هي 5 وبالتالي $M_e = 12$

$\frac{N}{4} = 2,25$ ومنه رتبة الربعي الأدنى Q_1 هي 3 وبالتالي $Q_1 = 7$

$\frac{3N}{4} = 6,75$ ومنه رتبة الربعي الأعلى Q_3 هي 7 وبالتالي $Q_3 = 31$

3) نقوم بترتيب هذه السلسلة ترتيبا تصاعديا حسب قيم النمط المدروس فنتحصل على
0 , 1 , 5 , 7 , 9 , 11 , 16 , 19 ؛ تكرار الكلي لهذه السلسلة هو : $N = 8$

$\frac{N}{2} = 4$ ومنه رتبة الوسيط هي 4 بالتالي $M_e = 7$

$\frac{N}{4} = 2$ ومنه رتبة الربعي الأدنى Q_1 هي 2 وبالتالي $Q_1 = 1$

$\frac{3N}{4} = 6$ ومنه رتبة Q_3 هي 6 وبالتالي $Q_3 = 11$

تطبيق - 3 : تعيين سلسلة إحصائية علم تكرارها ووسيط والربعين الأدنى والأعلى

1) عين الوسيط M_e والربعين الأدنى والأعلى للسلسلة الإحصائية (x_i , n_i) المعرفة في الجدول التالي :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	4	8	12	13	15	9	4	4

2) عين سلسلة إحصائية ذات 13 قيمة (تكرارها 13) بحيث : $Q_1 = 4$ و $M_e = 8$ و $Q_3 = 10$

✓ **الحل :**

1) التكرار الكلي لهذه السلسلة هو : $N = 69$

$\frac{N}{2} = \frac{69}{2} = 34,5$ ومنه رتبة الوسيط هي 35 وبالتالي $M_e = 4$

$\frac{N}{4} = \frac{69}{4} = 17,25$ ومنه رتبة Q_1 هي 18 وبالتالي $Q_1 = 3$

$\frac{3N}{4} = 51,75$ ومنه رتبة Q_3 هي 52 وبالتالي $Q_3 = 5$

2) $N = 13$ ومنه السلسلة تشمل 13 حدا

□ $\frac{N}{4} = 3,25$ ومنه رتبة Q_1 هي 4 وبما أن قيمته 4 فإنه توجد ثلاثة قيم اقل او تساوي 4 نختار على سبيل المثال الأعداد 4 , 3 , 1

□ $\frac{N}{2} = 6,5$ ومنه رتبة الوسيط M_e هي 7 وقيمته 8 وعليه فإنه توجد 6 حدود أصغر أو تساويه نختار على سبيل المثال 8 , 7 لأننا عينا منها 4 حدود

□ $\frac{3N}{4} = 9,75$ ومنه رتبة Q_3 هي 10 وقيمته 10

إذن توجد 9 حدود اقل او تساوي Q_3 نختار على سبيل المثال 10 , 9 لأننا عينا منهما 7 حدود ولإتمام حدود هذه السلسلة نضيف لها على الأكثر 25 % من التكرار الكلي اي 3 حدود قيمها اكبر او تساوي Q_3 ، نختار على سبيل المثال 10 , 11 , 15 وعليه فالسلسلة المختارة هي : 15 , 11 , 10 , 10 , 10 , 9 , 8 , 8 , 7 , 4 , 4 , 3 , 1

تطبيق - 4 : حساب الوسيط والربعين الأدنى والأعلى من منحنى التوترات المجمعة

لتكن السلسلة الإحصائية المعرفة بالجدول التالي :

الفئات	[0,2[	[2,4[	[4,6[	[6,8[	[8,10[
التكرار n_i	8	15	21	12	4

1) ارسم منحنى التوترات المجمعة الصاعدة ثم عين قيمة تقريبية لكل من الوسط والربعين الأدنى والأعلى .

2) عين حسابيا قيمة كل من الوسط والربعين الأدنى والأعلى

✓ **الحل :**

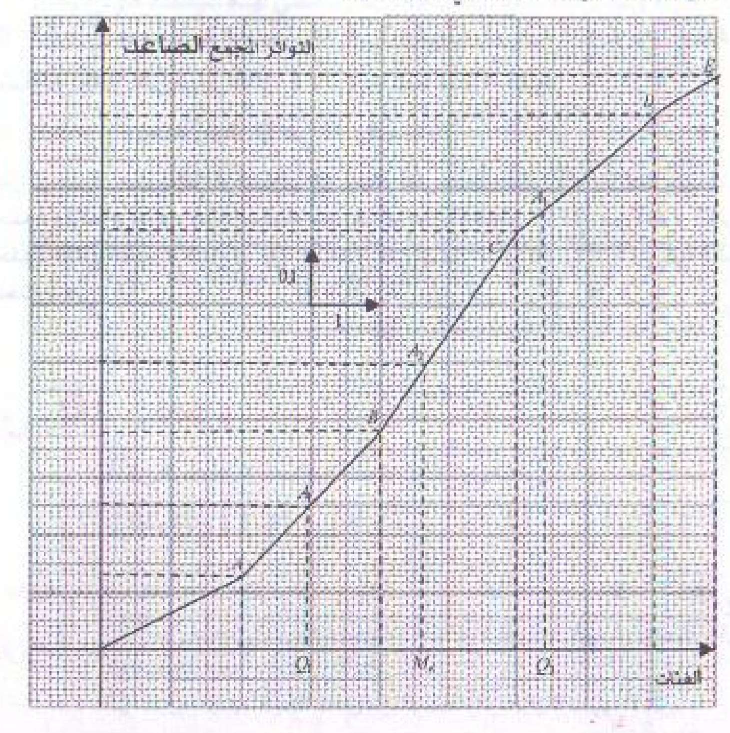
1) التكرار الكلي لهذه السلسلة هو : $N = 60$ ؛ التواتر معطى بالعلاقة : $f_i = \frac{n_i}{N}$

الفئات	[0,2[	[2,4[	[4,6[	[6,8[	[8,10[
التكرار n_i	8	15	21	12	4
الطرف العلوي للفئة	2	4	6	8	10
f_i	0,13	0,25	0,35	0,20	0,06
التوترات المجمع الصاعد	0,13	0,38	0,73	0,93	1

□ Q_1 هي فاصلة نقطة تقاطع منحني التوترات المجمعة الصاعدة والمستقيم ذوا المعادلة ؛ $y = 0,25$ والقيمة التقريبية لـ Q_1 هي $Q_1 \approx 3$

□ M_e هي فاصلة نقطة تقاطع منحى التوترات المجمعة الصاعدة والمستقيم ذو المعادلة $y = 0,5$ و القيمة التقريبية لـ M_e هي ؛ $M_e \approx 4,5$

□ Q_3 هي فاصلة نقطة تقاطع منحى التوترات المجمعة الصاعدة والمستقيم ذو المعادلة $y = 0,75$ و القيمة التقريبية لـ Q_3 هي ؛ $Q_3 \approx 7,5$



2) □ تعيين قيمة Q_1 ؛

Q_1 هي فاصلة نقطة من القطعة $[AB]$

الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{A_1B}$ مرتبطين خطيا . $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\0,25\end{pmatrix}$ ، $\vec{A_1B}\begin{pmatrix}4-Q_1\\0,13\end{pmatrix}$

$\vec{AB}$ و $\vec{A_1B}$ مرتبطين خطيا هذا معناه ان ؛ $2(0,13)-0,25\times(4-Q_1)=0$

بعد التبسيط العبارة السابقة نجد $Q_1 = 2,96$

□ تعيين M_e ؛ M_e فاصلة نقطة من القطعة $[BC]$

الشعاعان $\vec{BC}$ و $\vec{A_2C}$ مرتبطين خطيا و لدينا ؛ $\vec{BC}\begin{pmatrix}2\\0,35\end{pmatrix}$ ، $\vec{A_2C}\begin{pmatrix}6-M_e\\0,23\end{pmatrix}$

بما ان $\vec{BC}$ و $\vec{A_2C}$ مرتبطان خطيا فإنه ينتج ؛ $2(0,23)=0,35\times(6-M_e)$ ومنه ؛

$M_e = 6-\frac{0,46}{0,35}$ إذن ؛ $M_e = 4,68$

□ تعيين Q_3 بنفس الكيفية السابقة نجد ان ؛ $Q_3 = 7,82$

تطبيق . 5 : حساب العشريين الأدنى والأعلى من منحنى التوترات مجمعة

لتكن السلسلة الإحصائية المعطاة في الجدول التالي ؛

قيم النمط x_i	1	2	3	4	5	6
التكرار n_i	90	80	90	100	160	120

1) أرسم منحى التوترات المجمعة الصاعدة ثم حدد عليه قيمة D_1 و D_9

2) عين بالحساب قيمة D_1 و D_9 .

✓ الحل :

1)

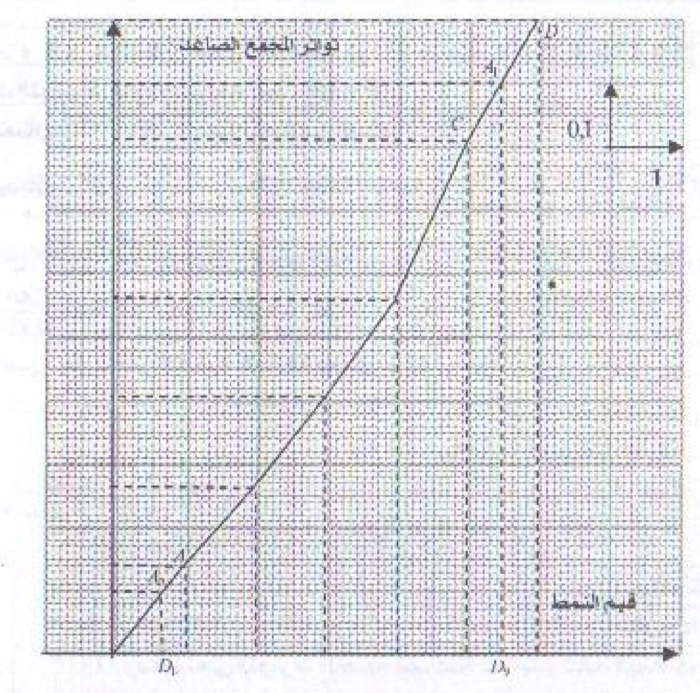
قيم النمط x_i	1	2	3	4	5	6
التكرار n_i	90	80	90	100	160	120
التوترات f_i	0,14	0,125	0,14	0,156	0,25	0,187
التوترات المجمع الصاعد	0,14	0,265	0,405	0,561	0,811	1

□ D_1 هي فاصلة نقطة تقاطع منحى التوترات المجمعة مع المستقيم ذو المعادلة $y = 0,1$ والقيمة التقريبية لها هي 0,6

□ D_9 هي فاصلة نقطة تقاطع منحى التواترت المجمعة مع لمستقيم ذو المعادلة $y = 0,9$ والقيمة التقريبية لها هي $D_9 \approx 5,5$

2) D_1 هي فاصلة النقطة A_0 ؛

$\vec{OA}\begin{pmatrix}1\\0,14\end{pmatrix}$ ، $\vec{OA_0}\begin{pmatrix}D_1\\0,1\end{pmatrix}$



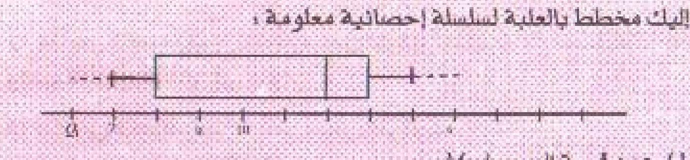
الشعاعان $\vec{OA}$ و $\vec{OA_0}$ مرتبطين خطيا ومنه ينتج $D_1\times 0,14=0,1$ إذن $D_1=0,7$ ،

□ D_9 هي فاصلة النقطة A_1 $\vec{CD}\begin{pmatrix}1\\0,19\end{pmatrix}$ ، $\vec{CA_1}\begin{pmatrix}D_9-5\\0,09\end{pmatrix}$

$\vec{CA_1}$ و $\vec{CD}$ مرتبطين خطيا ومنه ينتج : $(D_9-5)(0,19)=0,09$ ومنه $D_9=5,47$

تطبيق . 6 : تعيين الوسيط – الانحراف الربعي – النسبة المئوية

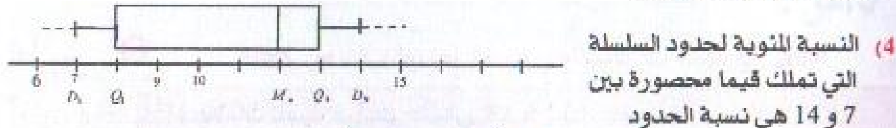
إليك مخطط بالعلبة لسلسلة إحصائية معلومة :



1) عين قيمة الوسيط M_e
2) عين النسبة المئوية لحدود السلسلة التي تملك قيما أصغر أو تساوي 14
3) عين الانحراف الربعي لهذه السلسلة
4) عين النسبة المئوية لحدود السلسلة التي تملك قيما محصورة بين 7 و 14

✓ الحل :

1) قيمة الوسيط هي : $M_e=12$
2) النسبة المئوية لحدود السلسلة التي تملك قيما أصغر من أو يساوي 14 هي : 90% لأن : $D_9=14$
3) الانحراف الربعي هو طول مستطيل العلبة ويساوي : Q_3-Q_1
$I=Q_3-Q_1=13-8=5$



4) النسبة المئوية لحدود السلسلة التي تملك قيما محصورة بين 7 و 14 هي نسبة الحدود المحصورة بين D_1 و D_9 وهي : 80% $(90^\circ-10^\circ=80^\circ)$

تطبيق . 7 : مخطط بالعلبة لسلسلة - صحة أو خطأ معلومات معطاة

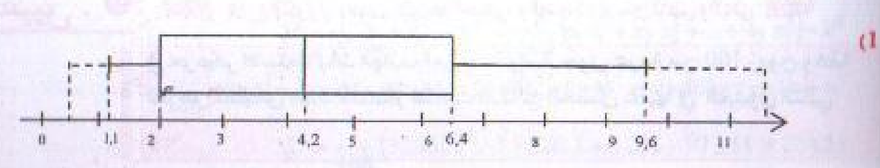
قامت مديرية البيئة والمحيط لولاية الجزائر برصد يومي لنسبة التلوث بمادة أول أكسيد الكربون (C_O) (ميكرو غرام على m^3) في شهر جانفي لعام 2004 فكانت نتائج هذه الدراسة كما في الجدول التالي :

الطرف الأدنى (min)	D_1	Q_1	M_e	Q_3	D_9	الطرف الأعلى (max)
0,5	1,10	2	4,2	6,4	9,6	11.8

1) مثل هذه السلسلة بمخطط العلبة
2) المعلومات التالية صحيحة أم خاطئة ؟
- نصف القيم المقاسة أصغر من $4,2\mu g/m^3$
- 80% من القيم المقاسة محصورة بين 1,10 و 9,6 ميكرو غرام على m^3
- أكثر من 10% من القيم المقاسة تفوق $10\mu g/m^3$

✓ الحل :

1)



2) المعلومة " نصف القيم المقاسة أصغر من $4,2\mu g/m^3$ " صحيحة لأن : $M_e = 4,2$ و 50% من الحدود تملك قيما أصغر أو يساوي الوسيط

- المعلومة " 80% من القيم المقاسة محصورة بين 1,10 و 9,6 ميكرو غرام على m^3 " صحيحة لأن : $D_1 = 1,1$ و $D_9 = 9,6$ ونسبة الحدود التي قيمتها محصورة بين D_1 و D_9 هي : $90^{\circ} - 10^{\circ} = 80^{\circ}$

- المعلومة " أكثر من 10% من القيم المقاسة تفوق $10\mu g/m^3$ " خاطئة لأن : $D_9 = 9,6$ ونسبة الحدود التي قيمها أكبر من 9,6 هي أقل من 10% .

تطبيق . 8 : حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري

1) علامات تلميذ هي على التوالي 8 ، 9 ، 10
- احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه السلسلة من العلامات

2) الانحراف المعياري لسلسلة إحصائية هو : 4 ومتوسط المربعات هي 26
- احسب الوسط الحسابي لهذه السلسلة

✓ الحل :

1) الوسط الحسابي لهذه السلسلة هو : $\bar{x} = \frac{10+9+8}{3} = 9$

الانحراف المعياري لهذه السلسلة هو S حيث : $S^2 = V$

$S^2 = V = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{i=3} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{3}(100+81+64) - 81 = 0,66$ منه : $S = \sqrt{0,66} = 0,81$

2) $S = 4$ و $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2 = 26$

ولدينا : $S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - m^2$ ومنه : $m^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{p} n_i x_i^2 - S^2 = 26 - 16 = 10$

منه : $m = \sqrt{10} = 3,16$

تطبيق . 9 : المدرج التكراري - حساب المتوسط الحسابي و الوسيط والربعين الأدنى والأعلى

في مركز الاستعلامات الهاتف أجريت دراسة حول عينة من 100 زبون وهذا لغرض تقليص مدة الانتظار فكانت النتائج المحصل عليها في الجدول التالي

مدة الانتظار (بالثانية)	[0, 10[	[10, 20[	[20, 30[	[30, 40[	[40, 50[	[50, 60[	[60, 70[
عدد الزبائن	10	15	25	25	8	12	5

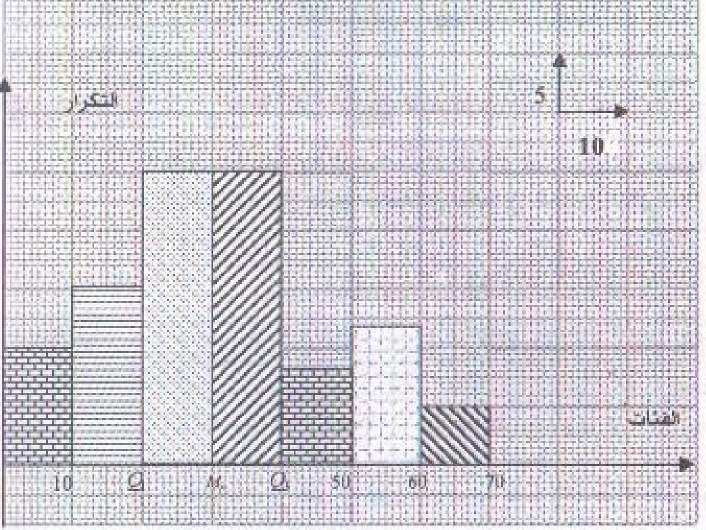
1) أرسم المدرج التكراري لهذه السلسلة

2) أحسب المتوسط الحسابي لمدة انتظار وكذلك الانحراف المعياري

3) عين : Q_1 ، Q_3 ، M_e على المدرج التكراري

✓ الحل :

1)



2) المتوسط الحسابي لهذه السلسلة هو $\bar{x}$ حيث : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i$

حيث : x_i تمثل مراكز الفئات و $1 \le i \le 7$

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(5\times10 + 15\times15 + 25\times25 + 25\times35 + 8\times45 + 12\times55 + 5\times65)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(50 + 225 + 625 + 875 + 360 + 660 + 325) = \frac{3120}{100} = 31,20\,s$$

□ الانحراف المعياري هو S حيث :

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{100}(n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \dots + n_7 x_7^2) - \bar{x}^2$$

$$S^2 = \frac{1}{100}(10\times5^2 + 15\times15^2 + 25\times25^2 + 25\times35^2 + 8\times45^2 + 12\times55^2 + 5\times65^2) - \bar{x}^2$$

$$S^2 = \frac{1}{100}(123500) - (31,20)^2 = 1235 - 973,44 = 261,51$$

إذن ، $S^2 = 261{,}56$ وبالتالي $S = \sqrt{261{,}56} = 16{,}17$

3) على المدرج التكراري للسلسلة السابقة، المستقيمات التي معادلاتها $x = Q_1$ و $x = M_e$ و $x = Q_3$ تقسم المساحة الكلية إلى أربعة أجزاء متساوية

- على المدرج التكراري ، مساحة كل مستطيل متناسبة مع تكرار (التواتر) الفئة الموافقة
- في داخل كل فئة $[a_i , a_{i+1}[$ التوزيع يكون منتظم ، المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ مع $\alpha \in [a_i , a_{i+1}[$ يقسم المستطيل الموافق له إلى مستطيلين مساحة كل منهما متناسبة مع التكرارات الموجودة في كل مجال $[\alpha , a_{i+1}[$ ، $[a_i , \alpha[$

إذن مساحة المدرج الموجود على يسار المستقيم ذو المعادلة $x = Q_1$ تمثل 25% من التكرارات

تطبيق . 10 : المدرج التكراري - حساب لمتوسط الحسابي و الوسيط والربعين الأدنى والأعلى

في وحدة للحماية المدنية سجلنا الوقت المستغرق لكل عملية لـ 140 تدخل ، النتائج المحصل عليها بالدقائق كما في الجدول التالي :

المدة	[0,20[	[20,40[	[40,60[	[60,80[
التكرار	2	18	32	40

المدة	[80,100[	[100,120[	[120,140[	[140,160[
التكرار	29	12	6	1

1) احسب المدة المتوسطة $\bar{x}$ والانحراف المعياري S

2) ارسم منحنى التوترات المجمعة الصاعدة

3) باستعمال المنحنى السابق عين نسبة عدد التدخلات التي مدتها تنتمي إلى المجال $[\bar{x}-s , \bar{x}+s]$

الحل :

1) $\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_8 x_8}{N}$

x_i مراكز الفئات و n_i تكرارها و N التكرار الكلي

$$\bar{x} = \frac{2\times10+18\times30+32\times50+40\times70+29\times90+12\times110+6\times130+150}{140}$$

$$\bar{x} = \frac{9820}{140} = 70{,}14$$

- الانحراف المعياري S ، لدينا $S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=8} n_i x_i^2 - \bar{x}^2$

$$S^2 = \frac{1}{140}\left[2\times10^2+18\times30^2+32\times50^2+40\times70^2+29\times90^2+12\times110^2+6\times130^2+150^2\right]-\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{140}(796400) - (70{,}14)^2 = 5688{,}57 - (70{,}14)^2 = 788{,}57$$

منه ، $S = \sqrt{788{,}57} = 28{,}08$

2)

الفئات	[0,20[	[20,40[	[40,60[
التكرار	2	18	32
التوترات	0,014	0,12	0,22
التوترات المجمعة الصاعدة	0,014	0,134	0,354

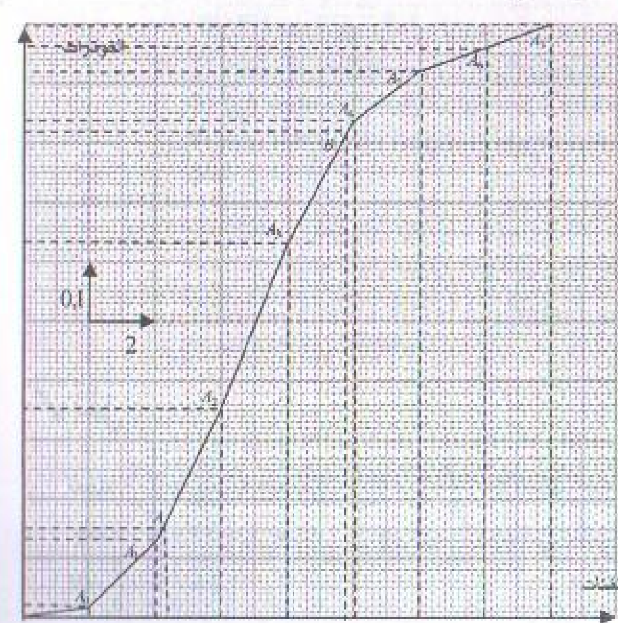
الفئات	[60,80[	[80,100[	[100,120[	[120,140[	[140,160[
التكرار	40	29	12	6	1
التوترات	0,28	0,207	0,08	0,04	0,007
التوترات المجمعة الصاعدة	0,634	0,841	0,921	0,961	1

3)

$\bar{x} - s = 70{,}14 - 28{,}08 = 42{,}06$

$\bar{x} + s = 70{,}14 + 28{,}08 = 98{,}22$

إذن ، $[\bar{x}-s , \bar{x}+s] = [42{,}06 , 98{,}22]$



A هي نقطة تقاطع المستقيم ذو المعادلة $x = \bar{x} - S$ ومنحنى التواتر المجمع الصاعد . ترتيب A هي y_1 وفاصلتها 42,06 ، النقطة A تنتمي إلى القطعة $[A_1 A_2]$

$\overrightarrow{A_1A_2}\begin{pmatrix}60-40\\0{,}354-0{,}134\end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{A_1A_2}\begin{pmatrix}20\\0{,}22\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A_1A}\begin{pmatrix}42{,}06-40\\y_1-0{,}134\end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{A_1A}\begin{pmatrix}2{,}06\\y_1-0{,}134\end{pmatrix}$

بما ان : $\overrightarrow{A_1A_2}$ مرتبط خطيا مع $\overrightarrow{A_1A}$ فإن :

$20\left(y_1-0{,}134\right)=0{,}22\times 2{,}06$ منه $y_1=0{,}154$

- بنفس الكيفية نجدهترتيب النقطة B التي هي نقطة تقاطع المستقيم ذو المعادلة $x=\bar{x}+s$ مع منحى التواتر المجمعة الصاعدة وبعد الحساب نجد $y_2=0{,}822$

- النسبة المئوية لعدد التداخلات التي مدتها تنتمي الى المجال : $\left[\bar{x}-s\ ,\bar{x}+s\right]$ هي : 68% (68% تعبر عن النسبة المئوية للعدد y_2-y_1)

تطبيق . 11 : حساب مؤثرات سلسلة قيم نمطها معطى بدلالة قيم نمط سلسلة معلومة

لتكن السلسلة الإحصائية ذات المتغير x_i و $\bar{x}$ ، s الوسط الحسابي و الانحراف المعيا ري لها على التوالي ولتكن السلسلة الإحصائية ذات المتغير y_i حيث من احل كل i: $y_i=\frac{x_i-\bar{x}}{s}$

1) احسب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لسلسلة ذات المتغير y_i .

2) في قسم السنة الثانية ثانوي المعدل في مادة الرياضيات هو 9 و الانحراف المعياري للمعدلات هو 3 وفي قسم اخر نفس المستوى المعدل 11 و الانحراف المعياري هو 4 .

- مع العلم أن القسمين لهما نفس المستوى لكن تصحيح الأستاذين مختلف احمد من القسم الأول معدله 12 وسفيان من القسم الثاني معدله 15 باستعمال السلسلة الإحصائية ذات المتغير y_i

قارن بين هذين التلميذين

✓ الحل :

1) لدينا $y_i=\frac{1}{S}x_i-\frac{\bar{x}}{s}$ وبوضع : $a=\frac{1}{s}$ و $b=\frac{-\bar{x}}{s}$ نجد $y_i=a\,x_i+b$

ومنه : $\bar{y}=a\,\bar{x}+b$ حيث : $\bar{y}$ هو الوسط الحسابي لسلسلة ذات المتغير y_i

$\bar{y}=\frac{1}{s}\bar{x}-\frac{\bar{x}}{s}=0$

- الانحراف المعياري للسلسلة ذا المتغير y_i هو : s_y المعرف ب: $S_Y=\left|a\right|S_x=\frac{1}{S}\times S=1$

2) من السؤال الأول نضع : $x_i'=\frac{x_i-\bar{x}}{S_x}$ بحيث : $\bar{x}=9$ و $S_x=3$

$z_i'=\frac{z_i-\bar{z}}{S_Z}$ بحيث : $\bar{z}=11$ و $S_z=4$

لنبحث عن صورة $x_1=12$ و $z_1=15$ بواسطة السلسلتين : x_i' ، و z_i' على الترتيب

$x_1'=\frac{x_1-\bar{x}}{S_x}=\frac{12-9}{3}=\frac{3}{3}=1$ ، $z_1'=\frac{z_1-\bar{z}}{S_Z}=\frac{15-11}{4}=\frac{4}{4}=1$

بما ان : $x_1'=z_1'$ فإننا نستنتج أن التلميذين لهما نفس المستوى .

السلسلة ذات المتغير y_i تسمح لنا بمقارنة سلاسل ذات متغيرات غير معبر عنها بنفس الوحدة

تطبيق . 12 : مقارنة بين سلسلتين بواسطة الثنائية (الوسط الحسابي . الانحراف المعياري)

السلسلة الإحصائية التالية تعطى قامات 52 مولود وليدوا بمستشفى خلال شهر بالسنتمتر.

القامة (x_i)	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
التكرار n_i	2	3	6	6	7	9	5	5	4	3	1	1

1) احسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه السلسلة

2) السلسلة التالية تعطي قامات 400 مولود ولدوا بمستشفى خلال سنة

الفئات	[40 , 41[	[41 , 42[	[42 , 43[	[43 , 44[	[44 , 45[
التكرار	3	6	20	50	80

[45 , 46[	[46 , 47[	[47 , 48[	[48 , 49[	[49 , 50[	[50 , 51[	[51 , 52[
60	70	45	16	35	10	5

أ) احسب قيمة الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه السلسلة

ب) قارن بين هاتين السلسلتين .

✓ الحل :

1) ليكن $\bar{x}$ و S الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه السلسلة : $\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=12}n_i\,x_i$

$=\frac{1}{52}\left(n_1x_1+....+n_{12}\,x_{12}\right)=\frac{1}{52}\left(2331\right)=44{,}82$

- الانحراف المعياري : $S^2=\frac{1}{N}\sum n_i\,x^2{}_i-\bar{x}^2$

$=\frac{1}{52}\left(n_1\,x^2{}_1+......+n_{12}\,x^2{}_{12}\right)-\bar{x}^2=\frac{1}{52}\left(104843\right)-\left(44{,}82\right)^2$

$$= 2016{,}21 - 2008{,}82 \quad = 7{,}37$$

ومنه : $S = \sqrt{7{,}37} = 2{,}78$

2) ليكن $\overline{y}$ و S_y الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه السلسلة $\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=12} n_i\, y_i$

$$= \frac{1}{400}\left[n_1\, y_1 + n_2\, y_2 + ... + n_{12}\, y_{12} \right] \; = \frac{1}{400}(18349) = 45{,}85$$

- الانحراف المعياري : $S^2{}_y = \frac{1}{400}\sum n_i\, y_i^2 - \overline{y}^2$

$$= \frac{1}{400}(843674) - (45{,}87)^2 = 2109{,}18 - 2104{,}05 \quad = 5{,}13$$

منه : $S_y = \sqrt{5{,}13} = 2{,}26$

بما أن الانحراف المعياري للسلسلة الثانية أقل من الانحراف المعياري للسلسلة الأولى فإن السلسلة الثانية أقل تشتت من الأولى .

تطبيق . 13 : مقارنة مؤشرات سلسلة ليست مبوبة مع مؤشرات نفس السلسلة مبوبة في فئات

لتكن السلسلة الإحصائية التالية :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n_i	7	12	15	19	31	45	58	45	35	24	17	14	10	08	05

1) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه السلسلة

2) بوب هذه السلسلة في 5 فئات ذات نفس الطول ثم احسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه السلسلة ماذا تستنتج .

✓ الحل :

1) $\overline{x}$ الوسط الحسابي هو $\overline{x}$ حيث: $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum x_i\, n_i = \frac{2570}{345} = 7{,}44$

الانحراف المعياري هو S حيث : $S^2 = \frac{1}{N}\sum n_i\, x^2{}_i - \overline{x}^2$

$$S^2 = \frac{1}{345}(22302) - (7{,}44)^2 = 9{,}389$$

ومنه : $S = \sqrt{9{,}289} = 3{,}04$

(2

الفئات	[1,4[	[4,7[	[7,10[	[10,13[	[13,16[
التكرار	34	95	138	55	23

$\overline{x}'$ الوسط الحسابي للسلسلة الثانية حيث : $\overline{x}' = \frac{1}{345}\sum_{i=1}^{i=5} n_i\, x'_i$

$$= \frac{1}{345} \times (34 \times 2{,}5 + 95 \times 5{,}5 + 138 \times 8{,}5 + 23 \times 14{,}5) = \frac{1}{345} \times 2114 = 6{,}12$$

ليكن S' الانحراف المعياري للسلسلة الثانية

$$S'^2 = \frac{1}{345}\sum n_i\, x'^2{}_i - \overline{x}'^2$$

$$= \frac{1}{345} \times 17892{,}5 - (6{,}16)^2 \quad = 51{,}86 - 37{,}45 = 14{,}41$$

ومنه : $S' = \sqrt{14{,}41} = 3{,}79$

عند تبويب سلسلة في فئات لها نفس الطول ، المتوسط يسهل حسابه لأننا عوضنا معطيات السلسلة بمركز فئات لكن لا يحدث نفس الشيء في حساب الانحراف المعياري أين الأخطاء تتدخل بمربعاتها .

يمكن استعمال هذه المساواة $\left(S'^2 = S^2 + \frac{a^2}{12} \right)$ لحساب S' حيث a طول الفئة .

تمارين و مسائل

1 في كل حالة من الحالات التالية نعطى تكرار عينة من مجتمع إحصائي بحيث هذه العينة مرتبة ترتيبا تصاعديا حسب قيم النمط المدروس

1) عين الرتب الموافقة للربعين الأعلى والأدنى والعشرين الأدنى والأعلى وكذا الوسيط

ا) 121 شخص ب) 177 شخص ج) 1101 شخص

د) 999 شخص هـ) 2005

2 عين الوسيط ، الربعين الأدنى والأعلى و الوسط الحسابي للسلاسل الإحصائية التالية

1) 1 , 11 , 15 , 7 , 9 , 27 , 0 , 15 , 31 , 42 , 101 , 6 , 17 , 1

2) 201 , 17 , 21 , 0 , 36 , 12 , 37 , 21 , 3 , 15 , 12 , 100

3) 7 , 11 , 3 , 2 , 15 , 16 , 31 , 3 , 42 , 45 , 51 , 18 , 14 , 11

3 عين الوسيط M_e والربعين الأدنى والأعلى والعشرين الأدنى والأعلى للسلسلة الإحصائية المعرفة في الجدول التالي (n_i , x_i) :

قيم النمط x_i	1	2	3	4	5	6
التكرار n_i	11	13	27	30	4	15

4 1) عين سلسلة إحصائية تكرارها 25 بحيث : $Q_1 = 5$ ، $M_e = 11$ ، $Q_3 = 15$

2) عين سلسلة الإحصائية تكرارها 20 بحيث : $M_e = 11$ ومداها $e = 16$ وانحرافها الربعي يساوي 6 .

5 لتكن سلسلة إحصائية المعرفة بالجدول التالي

الفئات	[0,3[	[3,6[	[6,9[	[9,12[	[12,15[	[15,18[	[18,21[
التكرار n_i	10	15	28	19	13	11	10

1) أرسم منحنى التوترات المجمعة الصاعدة ثم عين على نفس الشكل كل من Q_1 ، M_e ، Q_3 محددا القيمة التقريبية لكل منها

2) عين حسابيا قيمة كل من Q_1 ، M_e ، Q_3

6 1) ألقيت زهرة نرد غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6 ألف مرة في الهواء ورقبنا الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي فكانت النتائج التالية:

الوجه	1	2	3	4	5	6
التكرار n_i	120	200	150	130	100	300

ا) أرسم منحنى التوترات المجمعة الصاعدة

ب) احسب قيمة كل من Q_1 ، M_e ، Q_3 ، D_1 ، D_9 لهذه السلسلة ثم أرسم مخطط بالعلبة لهذه السلسلة .

2) ألقى شخص آخر زهرة نرد ألف مرة في الهواء ورقبنا الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي فكانت النتائج التالية :

الوجه	1	2	3	4	5	6
التكرار n_i	100	200	350	50	150	150

1) ارسم منحنى التوترات المجمعة الصاعدة

2) احسب قيمة Q_1 ، M_e ، Q_3 ، ثم أنشئ المخطط بالعلبة لهذه السلسلة

3) قارن بين السلسلتين بواسطة مخطط بالعلبة .

7 إليك مؤثرات سلاسل إحصائية لعينات ذات نفس التكرار

المؤثر	الطرف الأدنى	Q_1	M_e	Q_3	الطرف الأعلى
السلسلة A	5	9	11	13	17
السلسلة B	7	10	11	14	16
السلسلة C	6	8	11	13	15

1) عين على منحنى التوترات المجمعة الصاعدة للسلسلة A المعلومات المدونة في الجدول السابق ثم أنشئ المضلع الممكن للتوترات المجمعة الصاعدة لهذه السلسلة

2) أنشئ المخططات بالعلبة للسلاسل الثلاثة ثم قارن بينها .

8 نعتبر سلسلة العلامات (من 0 إلى 20) مؤثراتها مدونة كتالي :

الطرف الأدنى	Q_1	الوسط الحسابي	الوسيط	Q_3	الطرف الأعلى
3	9	11	11	13	17

قام الأستاذ برفع علامات التلاميذ بنقطة واحدة

1) ما هي مؤثرات السلسلة الجديدة

2) لنفس السلسلة الأستاذ قام برفع العلامات بنسبة 15% حدد مؤثرات السلسلة المحصل عليها .

9 1) علامات تلميذ هي على التوالي 5 , 11 , 12 , 13
- احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه السلسلة من العلامات
2) الانحراف المعياري لسلسلة إحصائية هو 2 و المتوسط الحسابي هو 10 ومجموع المربعات $\left(n_i\ x_i^2\right)$ هو : 2080.
- احسب تكرار هذه السلسلة

10 إليك مؤشرات سلسلة أجور عمال مؤسسة بالدينار :

الطرف العلوي	الانحراف المعياري	Q_3	الوسط الحسابي	M_e	Q_1	الطرف الأدنى
30000	4000	20000	18000	17000	16000	15000

1) إذا علمت 1 دولار يساوي 80 دينار فأوجد مؤشرات السلسلة المعطاة بالدولار
2) لتكن B سلسلة إحصائية ذات المتغير y_i حيث : $y_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{S}$ حيث : $\bar{x}$ ، S هما المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للسلسلة الأولى ذات المتغير x_i
عين مؤشرات السلسلة B

11 في مسابقة تحتوي على ثلاث إمتحنات وبعد المداولات قام أستاذ بتسجيل نقاط نتائج 30 تلميذ في الثلاث إمتحنات ، هذه النتائج مدونة في الجدول التالي:

النقطة /20 التكرار	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
الامتحان 1	0	6	5	8	1	3	0	2	0	1	2	2
الامتحان 2	3	0	5	0	8	0	3	4	0	1	4	2
الامتحان 3	0	0	2	1	6	3	5	0	2	6	3	2

1) ارسم المخطط بالعلبة للسلسلة الإحصائية A المكونة من النقط المحصل عليها في الامتحان 1 .
2) ارسم المخطط بالعلبة للسلسلة الإحصائية B المكونة من النقط المحصل عليها في الامتحان 2 .
3) قارن بين السلسلتين A و B
4) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للسلسلة B
5) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للسلسلة الإحصائية المكونة من النقط المحصل عليها في الامتحان 3 .
6) قارن بين نتائج الامتحان 1 و الامتحان 2 والامتحان 3

12 في دراسة اجريت حول عينتين كل منهما متكونة من 1150 شخص حيث ، العينة الأولى تشاهد نشرة الأخبار الساعة الواحدة والعينة الثانية تشاهد نشرة أخبار الساعة الثامنة نريد معرفة أعمار هؤلاء الشاهدين ، فتحصلنا على هذه النتائج المدونة في الجدول التالي :

السن	[0,15[	[15,30[	[30,45[	[45,60[	[60,75[
عدد الشاهدين لنشرة الواحدة	10	120	200	570	250
عدد الشاهدين لنشرة الثامنة	110	290	410	260	80

1) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للسلسلة الإحصائية المتعلقة بمشاهدي النشرة الإخبارية للساعة الثامنة .
2) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للسلسلة الإحصائية المتعلقة بمشاهدي نشر الإخبارية للساعة الواحدة .
3) قارن بين نتائج السلسلتين .

13 نعتبر السلسلة الإحصائية المكونة من القيم : x_1 , x_2 , x_3 ,..... x_n وسطها الحسابي $\bar{x}$ وانحرافها المعياري S
ليكن m هو عدد قيم السلسلة الإحصائية التي تنتمي إلى المجال $[\bar{x}-2s\, ,\bar{x}+2s]$
1) ما هو عدد قيم السلسلة الإحصائية التي تحقق المتباينة التالية : $|x_i-\bar{x}|\rangle\, 2s$
2) استنتج أن : $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 \rangle \left(n-m\right)\left(2s\right)^2$
3) بين عند ئذ أن : $m\rangle \frac{3}{4}n$
4) استنتج مما سبق انه على الأقل %75 من تكرارات السلسلة تأخذ قيما بحيث $|x_i-\bar{x}|\le 2s$

14 نعتبر سلسلتين إحصائيتين A و B
السلسلة A تكرارها N ومتوسط الحسابي m_1 انحرافها المعياري S_2
السلسلة B تكرارها N ومتوسطها الحسابي m_2 انحرافها المعياري S_2
نسمي m المتوسط الحسابي للسلسلتين A و B متجمعتين و S انحرافها المعياري
1) ما هي العلاقة التي تربط بين : m و m_1 و m_2
2) بين أن : $S=\dfrac{S_1^2+S_2^2}{2}+\left(\dfrac{m_1-m_2}{2}\right)^2$

الدرس : 8

الاحتمالات

1 - مصطلحات وتعاريف حول المجموعات

المجموعة الجزئية :

لتكن E مجموعة

نقول عن المجموعة A أنها جزئية من E إذا كان كل عناصرها تنتمي الى E

ونقول عند ئذ أن A محتواة في E ونكتب : $A\subset E$

ملاحظة

- المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تشمل اي عنصر ونرمز لها بالرمز ϕ وتكون محتواة في اي مجموعة .
- إذا كانت A مجموعة جزئية تشمل عنصر واحد نكتب : $A=\{a\}$ ونسمي المجموعة A مجموعة أحادية

تقاطع مجموعتين جزئيتين :

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من E

تقاطع المجموعتين A و B نرمز له بـ: $A\cap B$ هو المجموعة الشكلة من عناصر تنتمي الى A وتنتمي B .

ملاحظة

نقول عن A و B أنهما منفصلتين إذا كان تقاطعهما يساوي مجموعة خالية

إتحاد مجموعتين جزئيتين

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من E

اتحاد المجموعتين A و B نرمز له بـ: $A\cup B$ هو المجموعة المشكلة من عناصر تنتمي إلى المجموعة A أو إلى A

متممة مجموعة

لتكن A مجموعة جزئية من E

متممة A بالنسبة إلى E نرمز لها بالرمز $\overline{A}$ هي مجموعة عناصر من E التي لا تنتمي إلى A

تجزئة مجموعة

نسمي كل مجموعة عناصرها أجزاء E ، غير خالية منفصلة مثنى مثنى واتحادها يساوي المجموعة E تجزئة لـ: E .

عدد عناصر مجموعة منتهية

نرمز بـ : $n(A)$ إلى عدد عناصر المجموعة A

- إذا كانت A و B مجموعتين منتهيتين فإن $A\cup B$ مجموعة منتهية ولدينا:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \quad \text{و} \quad n(\overline{A})=n(E)-n(A)$$

تمرين تدريبي

نعتبر المجموعة E حيث : $E=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

A هي مجموعة الأعداد الزوجية ، B هي مجموعة الأعداد الأولية

C هي مجموعة مضاعفات 5

1) عين المجموعات التالية : $A\cup B, A\cap B, A\cap C, A\cup C, \overline{A}, \overline{A\cup B}$

2) هل المجموعات A, B, C تشكل تجزئة للمجموعة E ؟

الحل :

1) $A=\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ ، $B=\{2, 3, 5, 7, 11\}$ ، $C=\{0, 5, 10\}$

$A\cap C=\{0,\ 10\}$ ، $A\cap B\{2\}$ ، $A\cup B=\{0,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12\}$

$\overline{A\cup B}=\{1,\ 9\}$ ، $\overline{A}=\{1,3,5,7,9,11\}$ ، $A\cup C=\{0,2,4,5,6,8,10,12\}$

2) المجموعات A , B , C لا تشكل تجزئة للمجموعة E لأنها مجموعات غير منفصلة مثنى مثنى واتحادها لا يساوي المجموعة E

2. التجربة العشوائية

مثال

1) نرمي في الهواء قطعة نقدية و جهاها : P و F ثلاث مرات متتالية ونراقب بعد السقوط الوجه العلوي .

- في الرمية الأولى لدينا نتيجتين ممكنتين هما : P أو F وفي الرمية الثانية لدينا نتيجتين ممكنتين أيضا : P أو F ونفس الشيء بالنسبة الى الرمية الثالثة .

النتائج المحصل عليها في هذه التجربة نوصفها بالكيفية التالية (الشجرة المتفرعة) .

- مجموعة الإمكانيات المحصل عليها في هذه التجربة (رمي ثلاث قطع نقدية)

ولتكن Ω هي

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(P,F,F)\\(F,P,P),(F,P,F),(F,F,P),(F,F,F)\end{matrix}\right\}$$

2) نسمي A الحادث ظهور مرتين الوجه F الإمكانيات الموافقة لهذا الحادث هي مجموعة جزئية من Ω والمعرفة ب :

$\{(P,F,F)(F,P,F)(F,F,P)\}$

إذن خطوط ظهور مرتين الوجه F هي 3 من 9

3) الآن نقوم بإعادة هذه التجربة 200 مرة نتحصل على العينة E_1 : مقاسها 200 نكرر هذه العملية 3 مرات أخرى في نفس الظروف ، النتائج المحصل عليها مدونة في الجدول التالي :

العينة	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
E_1	10	16	22	32	34	26	34	26
E_2	16	24	26	38	24	16	22	34
E_3	28	16	22	24	20	16	54	20
E_4	30	36	16	18	20	20	20	40
المجموع	84	92	86	112	98	78	130	120

- تواتر ظهور الحادثة A في العينات الخمسة (العينة الخامسة مقاسها 800) مدون في الجدول التالي :

العينة	تواتر الحادثة A
E_1	$f_A=\dfrac{32+26+34}{200}=0{,}46$
E_2	$f_A=\dfrac{38+16+22}{200}=0{,}38$
E_3	$f_A=\dfrac{24+16+54}{200}=0{,}47$
E_4	$f_A=\dfrac{18+20+20}{200}=0{,}29$
E_5 (مجموع العينات الأربعة)	$f_A=\dfrac{112+78+130}{800}=0{,}4$

حيث : f_A تواتر الحادثة A معطى ب : $f_A=\dfrac{n}{N}$

و n هو عدد ظهور مرتين الوجه F و N مقاس العينة

نلاحظ أن كلما كان مقاس العينة كبيرا جدا كلما كان تواتر الحادثة A يقترب من $\dfrac{3}{9}$ وكذلك كل حادثة يمكن أرفاقها بعدد الذي يمثل تواترها

1.2 تعريف

نقول عن تجربة أنها عشوائية إذا كانت تؤدي إلى نتائج ممكنة ومعلومة : ω_1 ,...., ω_r لا يمكننا الحسم أي منها سيتحقق وذلك عندما نكرر هذه التجربة في نفس الظروف

- تدعى مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية بمجموعة الإمكانيات ونرمز لها ب: Ω .

مثال

تجربة إلقاء حجري نرد مرقمين من 1 إلى 6 وتسجيل الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي هي تجربة عشوائية مجموعة إمكانياتها هي :

تمرين تدريبي

كيس يحتوي 10 كرات حمراء و 10 كرات صفراء و 40 كرة سوداء ، نسحب عشوائيا كرة ونسجل لونها ثم نعيدها الى الكيس

1) انجز محاكاة لهذه التجربة

2) شكل عينة E_1 مقاسها 100 لهذه التجربة ثم عين توزيع التواترات لهذه العينة

3) شكل ثلاث عينات أخرى لها نفس المقاس 100 وفي نفس ظروف التجربة السابقة

أعط توزيع التواترات لـ 400 سحب السابقة

4) ما هو قانون الاحتمال الموافق لهذه التجربة

✓ الحل :

1) هناك عدة طرق لمحاكاة هذه التجربة العشوائية نختار لك هذه الطريقة رمي زهرة نرد غير مزيف 100 مرة .

نرفق الوجه 1 بالنتيجة كرة حمراء ونرفق الوجه 2 بالنتيجة كرة صفراء ونرفق الوجوه 3، 4، 5، 6 بالنتيجة كرة سوداء ونعُد عدد مرات ظهور الأرقام 1 , 2 , 3 , 4 , 5, 6

- نموذج هذه التجربة :

حظ ظهور الكرة الحمراء هو $\frac{1}{6}$

حظ ظهور الكرة الصفراء $\frac{1}{6}$

حظ ظهور كرة سوداء هو $\frac{4}{6}$

يمكن محاكاة هذه التجربة بواسطة جدول

2) اليك مثال لعينة مقاسها 100

كرة سوداء	كرة صفراء	كرة حمراء	
70	19	11	التكرار
0,70	0,19	0,11	التواتر

3) الجدول التالي يشير الى تواترات ثلاث عينات لها نفس المقاس 100

سوداء	صفراء	حمراء	
0,71	0,14	0,15	العينة الأولى
0,68	0,18	0,14	العينة الثانية
0,65	0,17	0,18	العينة الثالثة

في العينات الأربعة نلاحظ تذبذب في توزيع التواترات

- بتجميع العينات الأربعة نحصل على عينة مقاسها 400

- حساب تواتر ظهور كرة صفراء : لدينا $f_i = \frac{n_i}{N}$ ومنه $n_i = Nf_i$

تكرار الكرة الصفراء هو : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = N(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) \quad = 100\,(0{,}14 + 0{,}18 + 0{,}17 + 0{,}19) = 68$$

بما أن العينة مقاسها 400 فإن التواتر الموافق لظهور كرة صفراء هو $\frac{68}{400} = 0{,}17$

- بنفس الطريقة نجد تكرار ظهور الكرة الحمراء هو 58 و التواتر الموافق لها هو $\frac{58}{400} = 0{,}145$

كذلك تكرار ظهور الكرة السوداء هو 274 والتواتر الموافق لها هو 0,685

4) نسبة الألوان في الكيس هي $\frac{10}{60}$, $\frac{10}{60}$, $\frac{40}{60}$

نلاحظ أن توزيع التواترات في العينة ذات المقاس 400 تقترب من هذه النسب وعليه قانون الاحتمال الموافق لهذه التجربة العشوائية ملخص في الجدول التالي :

كرة سوداء	كرة صفراء	كرة حمراء	
$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	الاحتمال

4 . احتمال حادثة

لتكن Ω مجموعة النتائج المكنة لتجربة عشوائية

1.4 تعاريف

- الحادثة A هي مجموعة جزئية من Ω ونكتب $A \subset \Omega$

- الحادثة العكسية للحادثة A مكونة من النتائج المكنة لتجربة عشوائية التي لا تنتمي الى A ونرمز بـ $\overline{A}$

- الحادثة البسيطة هي حادثة التي تشتمل إلا على إمكانية وحيدة مثل $\{\omega_2\},\{\omega_1\}.....$
- المجموعة Ω تسمى بالحادثة الأكيدة و المجموعة ϕ تسمى بالحادثة المستحيلة
- إذا كان : A و B حادثتين فإن :
- الحادثة (A أو B) ونرمز لها بـ: $A\cup B$ محققة إذا تحققت على الأقل واحدة من الحادثتين .
- الحادثة (A و B) ونرمز لها بـ: $A\cap B$ محققة إذا تحققت الحادثتين A و B معا .

4.2 احتمال حادثة

لتكن Ω مجموعة النتائج المكنة لتجربة عشوائية حيث : $\Omega=\{\omega_1,\omega_2...,\omega_r\}$ ،
وليكن p قانون احتمال المعرف على Ω
احتمال الحادثة A هو مجموع احتمالات الحوادث البسيطة المحققة لـ A ونرمز له بـ: $P(A)$

□ خواص :

1) $P(\phi)=0$ و $P(\Omega)=1$
2) إذا كانت الحادثتين A و B غير ملائمتين (أي $A\cap B=\phi$) فإن:
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
3) إذا كانت A و B حادثتين كيفيتين فإن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
4) إذا كان $\overline{A}$ هي الحادثة العكسية للحادثة A فإن : $P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega)=1$

□ الإثبات :

1) $\Omega=\{w_1,w_2,....,w_r\}$ ولدينا: $p_i=p(w_i)$
$p(\Omega)=p(w_1)+p(w_2)+........+p(w_r)=p_1+p_2+p_3+....+p_r$
لكن : $\sum_{i=1}^{i=r} p_i=1$ إذن : $p(\Omega)=1$
2) $A=\{a_1,a_2,...,a_r\}$ ، $B=\{b_1,b_2,...,b_k\}$
لدينا: $P(A)=P_1+P_2+....P_r$ ، $P(B)=P'_1+P'_2+....P'_K$
$A\cup B=\{a_1,a_2,....a_r,b_1,b_2,....b_k\}$
بما أن A و B غير ملائمتين $(A\cap B=\phi)$ فإن :
$P(A\cup B)=P_1+P_2+...P_r+P'_1+P'_2+....P'_K=P(A)+P(B)$
4) □ $A\cup\overline{A}=\Omega$ $A\cap\overline{A}=\phi$
$P(A\cup\overline{A})=P(\Omega)=1.......(1)$ ، $P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})\ ....(2)$

من (1) و (2) نجد : $P(A)+P(\overline{A})=1$
□ بما أن $\phi=\overline{\Omega}$ و $\Omega=\overline{\Omega}\cup\Omega$ و $\phi=\overline{\Omega}\cap\Omega$ فإن : $P(\overline{\Omega}\cup\Omega)=P(\overline{\Omega})+P(\Omega)$
$P(\Omega)=P(\overline{\Omega})+P(\Omega)$ منه: $P(\overline{\Omega})=\phi$ إذن : $P(\phi)=0$

تمرين تدريبي

قمنا بدراسة إحصائية في محل تجاري لبيع الأدوات الكهرو منزلية حول الطلب اليومي للهوائيات ، النتائج المحصل عليها مدونة في الجدول التالي:

الطلب	0	1	2	3	4	5	6
الاحتمال	0,04	0,11	0,19	0,26	0,20	0,16	0,04

1) ما هو احتمال الحادثتين التاليتين
A: في يوم ما الطلب أصغر تماما من 4
B: في يوم ما الطلب على الاقل يساوي 2
2) ما هو إحتمال الحادثة $A\cap B$

✓ الحل :

1) $A=\{0,1,2,3\}$
$P(A)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)\ =0,04+0,11+0,19+0,26=0,60$
$B=\{2,3,4,5,6\}$
$P(B)=P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=0,19+0,26+0,20+0,16+0,04\ =0,85$
□ طريقة ثانية: ليكن $\overline{B}$ هو الحادثة الطلب في يوم ما أصغر تماما من 2
$\overline{B}=\{0,1\}$
$P(\overline{B})=P(0)+P(1)=0,15$
$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0,15=0,85$
2) $A\cap B=\{2,3\}$
$P(A\cap B)=P(2)+P(3)=0,19+0,26=0,45$

4.3 الاحتمال متساوي التوزيع

$\Omega=\{\omega_1,...,\omega_r\}$ ، $P_i=P(\omega_i)$
إذا كانت الأعداد P_i متساوية من أجل كل i نقول أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع .

بما أن : $P_1 = P_2 = ... = P_r$ و $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$ فإن : $P_i = P_1$ من أجل كل : $r \geq i \geq 1$

وبالتالي المساواة : $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$ تكتب : $rP_1 = 1$ أي : $P_1 = P_i = \frac{1}{r}$

مثال 1

عند رمي قطعة نقدية غير مزيفة النتيجتين الممكنتين P و F لهما نفس الاحتمال وعليه قانون الاحتمال متساوي التوزيع : $P(F) = P(P) = \frac{1}{2}$

مثال 2

نلقي خماسي وجوه غير متجانس يحمل الأرقام : 1، 2، 3، 4، 5 مُعد بحيث يكون احتمال ظهور الوجه الذي يحمل 2 هو ضعف احتمال أي وجه آخر .
أعط قانون احتمال لهذه التجربة وهل قانون الاحتمال المحصل عليه متساوي التوزيع؟

الحل :

كل إمكانية في هذه التجربة هي أحد الأرقام : 1، 2، 3، 4، 5 وهذه الإمكانيات غير متساوية وبالتالي إذا رمزنا بـ : $P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5$ إلى احتمالات ظهور الأرقام 1، 2، 3، 4، 5 على التوالي فإن حسب المعطيات

$P_2 = 2P_1 = 2P_3 = 2P_4 = 2P_5$ وبما أن :

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1$ فإنه ينتج : $P_2 = \frac{1}{3}$ و $P_1 = P_3 = P_4 = P_5 = \frac{1}{6}$

إذن النموذج الاحتمالي لهذه التجربة هو :

ω_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

نمذجة هذه التجربة تمت وفق قانون احتمال غير متساوي التوزيع

خاصية :

في حالة تساوي الاحتمال لدينا من أجل كل i : $P_i(\omega_i) = \frac{1}{r}$

إذا كانت الحادثة A متكون من m نتيجة ملائمة فإن : $P(A) = \frac{m}{r}$

أي : $P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لتحقيق } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$

الإثبات

ليكن P احتمال كل حادثة $\{\omega_i\}$: لدينا : $\sum_{i=1}^{r} p_i = r \times p$

ومنه: $r \times p = 1$ إذن : $p = \frac{1}{r}$

لدينا : $P(A) = m P$ ومنه : $P(A) = m \times \frac{1}{r} = \frac{m}{r}$

تمرين تدريبي

في حظيرة للسيارات توجد 200 سيارة 20 منها لها عطب في المحرك و 40 منها لها عطب في العجلات و 10 منها فيها العطبين
نختار عشوائيا سيارة من هذه الحظيرة
A : هي الحادثة " سيارة فيها عطب في المحرك "
B : هي الحادثة " سيارة فيها عطب في العجلات "
1) ما هو احتمال أن السيارة يوجد فيها على الأقل واحد من العطبين
2) ما هو احتمال أن السيارة لا يوجد فيها أي عطب .

الحل :

1) الحادثة " سيارة يوجد فيها على الأقل عطب واحد " هي : $A \cup B$
الحادثة " سيارة يوجد بها عطبين " هي الحادثة : $A \cap B$

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} \quad \frac{20}{200} = \frac{1}{20} = 0{,}1$$

$$P(B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} \quad \frac{40}{200} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} \quad \frac{10}{200} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}1 + 0{,}2 - 0{,}05 = 0{,}3 - 0{,}05 = 0{,}25$$

2) الحادثة " السيارة لا يوجد فيها أي عطب " هي الحادثة العكسية للحادثة $A \cup B$ وعليه :

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

5. كيفية إيجاد عدد الحالات الممكنة والحالات الملائمة

توجد طريقتان أساسيتان وهما إنشاء شجرة المتفرعة و ملئ الخانات

مثال 1 (إنشاء شجرة متفرعة)

نرمي قطعتين نقديتين غير مزيفتين في الهواء ونسجل النتائج المحصل عليها ، نستطيع وصف هذه التجربة بإنشاء مخطط الشجرة الذي يعطي النتائج الممكنة التالية : FF , PF , FP , PP

فمثلا احتمال ظهور النتيجة PP هو : $\frac{1}{4} = 0,25$

واحتمال ظهور النتيجتين PF أو FP هي: $\frac{2}{4} = 0,5$

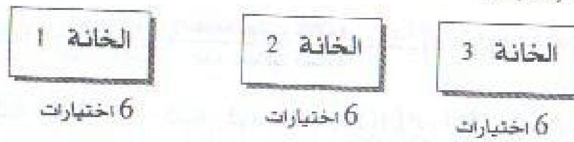
واحتمال ظهور النتيجة FF هي : $\frac{1}{4} = 0,25$

القطعة الأولى	القطعة الثانية	النتائج الممكنة
P	P	PP
P	F	PF
F	P	FP
F	F	FF

مثال 2 (ملئ الخانات)

كيس يحتوي على 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6 نسحب من الكيس ثلاث كرات على التوالي مع إرجاع الكرة إلى الكيس قبل السحب الموالي ، نسجل بالترتيب أرقام الكرات المسحوبة فنتحصل على قائمة أعداد مؤلفة من ثلاث أرقام ليست بضرورة مختلفة لعد الحالات الممكنة نستطيع استعمال طريقة ملئ الخانات .

نملئ ثلاث خانات مرقمة من 1 إلى 3 كل واحد ة منها برقم من الأرقام: 6 , 5 ,4, 3 , 2, 1.



هناك 6 اختيارات ممكنة للخانة 1 و 6 اختيارات ممكنة للخانة 2 ونفس الشيء للخانة الثالثة. وهذا لأن الكرات تعاد إلى الكيس قبل السحب الموالي

إذن هناك 6×6 اختيار لملئ الخانات 1 و 2 و $6(6\times6)$ لملئ الخانات 1 و

2 و 3 وعليه فإنه توجد 6^3 حالة ممكنة لسحب 3 كرات على التوالي مع الإرجاع .

مثال 3

كيس يحتوي على 6 كرات نسحب منه ثلاث كرات على التوالي بدون إرجاع هناك ستة اختيارات ممكنة للخانة الأولى و 5 اختيارات ممكنة للخانة الثانية و 4 اختيارات ممكنة للخانة الثالثة.

الخانة 1	الخانة 2	الخانة 3
6 اختيارات	5 اختيارات	4 اختيارات

إذن هناك (5×6) اختيار لملئ الخانتين 1 و 2 و $4(5\times6)$ اختيار لملئ الخانات 1 و 2 و 3 أي: $4\times5\times6$ حالة ممكنة لسحب 3 كرات على التوالي بدون الإرجاع .

6. المتغير العشوائي - قانون الاحتمال والأمل الرياضي و التباين والانحراف

1.6 المتغير العشوائي

تعريف :

Ω مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية

كل دالة معرفة على Ω وتأخذ قيمها في IR تسمى متغير عشوائي

مثال

نرمي ثلاث قطع نقدية مرقمة 3, 2, 1 في الهواء ونسجل الحرف الموجود على الأوجه العلوية ، مجموعة الإمكانيات لهذه التجربة هي Ω حيث :

$\Omega=\{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$ لنتخيل لعبة تتمثل في ربح مائة دينار كلما ظهر الوجه F وخسارة 100 كلما ظهر الوجه P .

PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFF → -300, -100, +100, +300

الدالة X التي ترفق بكل إمكانية الربح أو الخسارة تسمى بالمتغير العشوائي على Ω

إذن قيم المتغير العشوائي X هي -300 ، -100 ، 100 ، 300

ملاحظة

المتغير العشوائي X يأخذ عددا منتهيا من القيم $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ الحادثة " X تأخذ القيمة x_i " نرمز لها بـ: $(X=x_i)$
إذا كانت هذه الحادثة محققة من أجل عناصر A حيث: $A\subset\Omega$ فإن:
احتمال الحادثة $(X=x_i)$ هي احتمال A ونكتب: $P(X=x_i)=P(A)$

2.6 قانون الاحتمال لمتغير عشوائي

مثال

في المثال الموجود في الفقرة (6-1) نبحث عن احتمال الحادثة "ربح 100 دينار" التي نرمز لها بـ: $(X=100)$ ، هذه الحادثة تتحقق لما تتحقق الحادثة A من Ω حيث: $A=\{PFF, FFP, FPF\}$ لكن لدينا: $P(A)=\frac{3}{8}$
إذن احتمال الحادثة $(X=100)$ الذي نرمز له بـ: $P(X=100)$ هو:

$$P(X=100)=\frac{3}{8}$$

الجدول التالي يمثل ما نسميه بقانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

الربح x و الخسارة x	-300	-100	$+100$	$+300$
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

تعريف:

ليكن: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مجموعة قيم المتغير العشوائي X و P_i حيث: $1\le i\le n$ هو احتمال الحادثة $(X=x_i)$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X هي الدالة التي ترفق بكل x_i من مجموعة قيم X الاحتمال $P(X=x_i)$.

ملاحظة

- بشكل عام هذا القانون يعطى في جدول:

X	x_1	x_2	x_3	....	x_n
P	P_1	p_2	p_3	....	p_n

حيث: $\sum_{i=1}^{i=n} P_i=1$

- لنفس تجربة عشوائية نستطيع تعريف عدة متغيرات عشوائية .

3.6 الأمل الرياضي ، التباين والانحراف المعياري

أن تمثيل قانون الاحتمال لمتغير عشوائي في جدول مشابه لجدول توزيع التوترات لسلسلة إحصائية قادنا إلى هذه المفاهيم

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X الذي نرمز له بـ: $E(X)$ هو: $E(X)=\sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i$
- التباين الذي نرمز له: $V(x)$ هو: $V(X)=\sum_{i=1}^{i=n} P_i\times\left(x_i-E(X)\right)^2=\sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2-E^2(X)$
- الانحراف المعياري لمتغير عشوائي X نرمز له بـ: $\sigma(X)$ حيث: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

ملاحظة

عندما نعرف قانون احتمال على مجموعة الإمكانيات Ω المشكلة من أعداد حقيقية ω_i نعرف الأمل الرياضي والتباين و الانحراف المعياري لقانون الاحتمال بالعلاقات التالية: $\mu=\omega_1\times P_1+\omega_2 P_2+\ldots+\omega_n P_n=\sum_{i=1}^{i=n}\omega_i P_i$

$V=(\omega_1-\mu)^2P_1+\ldots+(\omega_n-\mu)^2P_n=\sum_{i=1}^{i=n}(\omega_i-\mu)^2 P_i$ و $\sigma=\sqrt{V}$

μ هو الأمل الرياضي و V التباين و σ الانحراف المعياري .

تمرين تدريبي ❶

تجربة عشوائية تتمثل في رمي قطعة نقدية تحمل على وجهيها الحرفين P و F ثلاث مرات متتالية ونسجل الحرف الذي يظهر على الوجه العلوي .

1) ليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد مرات ظهور الوجه P ، أحد القيم الممكنة لـ X .

2) في هذه التجربة الرامي يربح 10 دج إذا تحصل على مرتين الوجه P ويفقد 10 دج في الحالات الأخرى، عرف متغير عشوائي أخر وليكن Y

✓ الحل :

1) لكل حادثة $(X=x_i)$ نعين الحالات الملائمة له

- الحادثة $(X=0)$ تحقق إذا تحصلنا على FFF
- الحادثة $(X=1)$ تحقق إذا تحصلنا على FFP أو FPF أو PFF
- الحادثة $(X=2)$ تحقق إذا تحصلنا على FPP أو PPF أو PFP
- الحادثة $(X=3)$ تحقق إذا تحصلنا على PPP

PPP
PPF
PFP
PFF
FPP
FPF
FFP
FFF

ومنه قيم المتغير العشوائي X في هذه الحالة هي $\{0 , 1 , 2 , 3\}$

2) من أجل المتغير Y القيم المكنة له هي 10 , -10.

الحادثة $(Y=10)$ محققة إذا تحصلنا على PPF أو PFP أو FPP

الحادثة $(Y=-10)$ محققة إذا تحصلنا على الخمسة النتائج الباقية .

تمرين تدريبي ❷

في تجربة عشوائية التي تتمثل في رمي قطعة نقدية تحمل على وجهيها P و F ثلاث مرات متتالية نفرض أن كل النتائج المكنة لها نفس احتمال الظهور .

1) أوجد قانون احتمال للمتغيرين العشوائيين X و Y المعرفين بـ:

- X هو المتغير العشوائي الذي قيمه عدد مرات ظهور P على الوجه العلوي
- Y هو المتغير العشوائي الذي قيمه 10 إذا ظهر مرتين الوجه P و -10 في الحالات الأخرى

2) احسب الأمل و التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي Y

✓ الحل :

1) من أجل المتغير X : احتمال كل حادثة من الحوادث الثمانية هو : $\frac{1}{8}$

- الحادثة $(X=0)$ هي الحادثة $\{FFF\}$ ، إذن : $P(X=0)=\frac{1}{8}$

- الحادثة $(X=1)$ هي الحادثة : $\{PFF , FPF , FFP\}$ إذن :

$$P(X=1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

- بنفس الشيء نجد : $P(X=2)=\frac{3}{8}$ و $P(X=3)=\frac{1}{8}$

X	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

□ من أجل المتغير العشوائي Y

- الحادثة $(Y=10)$ هي الحادثة $\{PPF , PFP , FPP\}$

إذن : $P(Y=10)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

- الحادثة $(Y=-10)$ هي الحادثة العكسية للحادثة $(Y=10)$ و احتمالها هو :

$$P(Y=-10)=\frac{5}{8}$$

Y	-10	10
P_i	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$

2) $E(Y)=(-10)\times\frac{5}{8}+10\times\frac{3}{8}=-\frac{20}{8}$

$$V(Y)=\frac{5}{8}\left(-10+\frac{20}{8}\right)^2+\frac{3}{8}\left(10+\frac{20}{8}\right)^2=31{,}15+85{,}59=93{,}73$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{93{,}73}=9{,}68$$

تطبيقات نموذجية

تطبيق . 1 : تعيين قانون احتمال

1) نرمي زهرة نرد وجه مرقم بالرقم 1 ووجهين مرقمين برقم 2 و الأوجه الأخرى مرقمة بالرقم 4 و نسجل الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي
1) عين مجموعة الإمكانيات Ω لهذه التجربة
2) زهرة نرد مزيفه حيث : احتمال ظهور الوجوه : 2 ، 3 ، 4 ، 5 متساوية واحتمال ظهور الوجه 1 مرتين أصغر من الوجوه السابقة واحتمال ظهور الوجه 6 هو : 0,5
عين قانون احتمال المعرف على $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

✓ الحل :

1) مجموعة الإمكانيات لهذه التجربة هي : Ω حيث : $\Omega=\{1,2,4\}$

2) نسمي P_1 احتمال ظهور الوجوه 2 ، 3 ، 4 ، 5 و P_2 احتمال ظهور الوجه 1 و P_3 احتمال ظهور الوجه 6 لدينا : $P_1+P_2+P_3=1$ و منه نجد : $P_1+P_2=0,5$ لكن : $P_1=2P_2$ منه نجد : $2P_2+P_2=0,5$ أي : $P_2=\frac{0,5}{3}=0,16$ إذن : $P_1=2\times\frac{0,5}{3}=\frac{1}{3}=0,33$ و منه احتمال ظهور الوجه 2 هو : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

ظهور الوجه	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{0,5}{3}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$

تطبيق . 2 : تذبذب العينات - حساب التواترات

ترمي قطعتين نقديتين غير مزيفتين ذات الأوجه P و F ونسجل الحرف الذي يظهر على الوجه العلوي نعيد هذه العملية 20 مرة فنتحصل على عينة مقاسها 20 .
إليك نتائج خمس عينات مقاسها 20

العينة	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
PP	4	5	4	6	3
PF	13	10	8	10	12
FF	3	5	8	4	5

1) من أجل كل عينة من العينات السابقة أحسب تواترات ثلاث الحوادث ، PP ، PF ، FF ثم تواتر مجموع العينات الخمس (عينة مقاسها 100) لنفس الحوادث
2) اللاعب يربح 100 إذا تحققت الحادثة PP أو FF ويخسر 90 دج إذا تحققت الحادثة PF
- أحسب تواتر كل من الحادثتين ، الحادثة " اللاعب يربح 100 دج ، الحادثة " اللاعب يخسر 90 دج " في العينة A_1 ، 3) أحسب متوسط الربح أو الخسارة للعينة A_1

✓ الحل :

1) □ من أجل العينة A_1 : تواتر PP هو : $\frac{4}{20}$ ، تواتر PF هو : $\frac{13}{20}$ ، تواتر FF هو : $\frac{3}{20}$

□ من أجل العينة A_2 : تواتر PP هو : $\frac{1}{4}$ ، تواتر PF هو : $\frac{1}{2}$ ، تواتر FF هو : $\frac{1}{4}=0,25$

□ من أجل العينة A_3 : تواتر PP هو $\frac{4}{20}$ ، تواتر PF هو : $\frac{8}{20}$ ، تواتر FF هو : $\frac{8}{20}=0,40$

□ من أجل العينة A_4 : تواتر PP هو : $\frac{6}{20}$ ، تواتر PF هو : $\frac{10}{20}$ ، تواتر FF هو $\frac{4}{20}=0,2$

□ من أجل العينة A_5 : تواتر PP هو : $\frac{3}{20}$ ، تواتر PF هو : $\frac{12}{20}$ ، تواتر FF هو : $\frac{5}{20}$

□ حساب تواترات النتائج في العينة ذات المقاس100 :

- تواتر PP هو P_1 حيث : $P_1=\frac{4+5+4+6+3}{100}=\frac{22}{100}=0,22$

تواتر PF هو : P_2 حيث : $P_2=\frac{13+10+8+10+12}{100}=\frac{53}{100}=0,53$

- تواتر FF هو: P_3 حيث : $P_3=\frac{3+5+8+4+5}{100}=\frac{25}{100}=0,25$

2) اللاعب يربح 100 دج هذا معناه أن الحادثة " ظهور PP أو PF " تتحقق وتواتر هذه الحادثة هو P حيث : $P=\frac{4+3}{20}=\frac{7}{20}$

- تواتر الحادثة " اللاعب يخسر 90 دج هو P' حيث : $P'=\frac{13}{20}$

3) متوسط الربح أو الخسارة هو : μ حيث : $\mu=\sum_{i=1}^{i=2} f_i x_i$ حيث : $x_1=100$ ، $x_2=-90$

$$\mu = f_1 x_1 + f_2\ x_2 = \frac{7}{20}\times 100 + \left(\frac{13}{20}\right)(-90) = \frac{700}{20} - \frac{13\times 90}{20} = -23{,}5$$

متوسط الربح سالب بالتالي اللاعب إذا لعب كثيرا فإنه خاسر . (μ هو الأمل الرياضي)

تطبيق . 3: تعيين قانون الاحتمال

نرمي زهرة نرد ذات اربع اوجه مرقمة من 1 إلى 4 (رباعي وجوه) نسجل الرقم الموجود في الوجه السفلي بفرض ان هذا الحجر غير مزيف.
- اعط قانون الاحتمال لهذه التجربة

✓الحل :

مجموعة الإمكانيات لهذه التجربة هي 4 وهي : $\Omega=\{1,2,3,4\}$ بما ان الحجر متزن فإن احتمال ظهور اي وجه متساوي . وبما أن $n=4$ فإن احتمال كل وجه هو : $\frac{1}{4}$

الأوجه	1	2	3	4
الاحتمال	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

تطبيق . 4: حساب احتمال حوادث

اوجه حجر نرد متزن تحمل الأرقام التالية : 6 , 6 , 6 , 3 , 4 , 4 نرمي مرة واحدة هذا الحجر ، C,B,A هي الحوادث المعرفة بـ :
A : الحادثة "الرقم المتحصل عليه هو 6" ، B : الحادثة " الرقم المتحصل عليه هو 4 "
C : الحادثة " الرقم المتحصل عليه يختلف عن 3 "
1) أحسب احتمال الحوادث : C,B,A
2) E و F حادثتين من تجربة عشوائية أخرى حيث : $P(\overline{E})=0{,}44$ و $P(\overline{F})=0{,}63$ و $P(\overline{E\cup F})=0{,}32$ ، احسب : $P(E\cap F)$

✓الحل :

1) مجموعة الإمكانيات : $\Omega=\{6,3,4\}$ ، $P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5$

$P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0{,}33$ ، $P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0{,}83$

2) $P(E\cup F)=1-P(\overline{E\cup F})=1-0{,}32=0{,}68$

$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$

$P(E\cup F)=1-P(\overline{E})+1-P(\overline{F})-P(E\cap F)$

منه : $P(E\cap F)=2-P(E\cup F)-(P(\overline{E})+P(\overline{F}))=2-0{,}68-(0{,}63+0{,}44)=0{,}25$

تطبيق . 5: حساب احتمال حوادث

لتكن Ω مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية ما حيث: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,.....\omega_8\}$
نعتبر الحادثة A حيث $A=\{\omega_3,\omega_8,\omega_7\}$ و الحادثة $B=\{\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_7\}$
$C=\{\omega_1,\omega_5\}$ مع العلم أن الحوادث الأولية لها نفس الاحتمال
- احسب : $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ ، $P(A\cap B)$ ، $P(A\cup B)$ ، $P(\overline{A})$ ، $P(\overline{B})$

✓الحل :

$P(\omega_i)=\frac{1}{8}$ من اجل كل $1\le i\le 8$

$P(A)=P(\omega_3)+p(\omega_8)+p(\omega_7)=\frac{3}{8}$ ، $P(B)=P(\omega_3)+p(\omega_4)+p(\omega_5)+p(\omega_7)=\frac{1}{2}$

$P(C)=P(\omega_1)+p(\omega_5)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ ، $A\cap B=\{\omega_3\ \omega_7\}$ ومنه : $P(A\cap B)=\frac{2}{8}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{8}$ ، $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{5}{8}$ ، $P(\overline{B})=1-P(B)=0{,}5$

تطبيق . 6: حساب احتمال حوادث (سحب عشوائيا كرات من كيس)

يحتوي كيس على 7 كرات ثلاث منها سوداء مرقمة 1، 2، 3 واربعة كرات بيضاء مرقمة 1، 2، 3، 4 نسحب عشوائيا كرة من الكيس
1) أحسب احتمال الحوادث التالية : A : "كرة سوداء" ، B : "كرة بيضاء" ، C : "الكرة تحمل رقم زوجي"
2) أحسب احتمال الحوادث التالية :
$A\cap B$ ، $A\cap C$ ، $B\cap C$ ، $A\cup B$ ، $A\cup C$ ، $B\cup C$.

✓الحل :

1) $P(A)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}=\frac{3}{7}$ ، $P(B)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}=\frac{4}{7}$

$P(C)=\frac{3}{7}$ لأن عدد الكرة التي تحمل رقم زوجي هي 3

2) بما أن A و B حادثتين غير ملائمتين فإن $P(A\cap B)=0$

- الحادث $A\cap C$: الكرة سوداء وتحمل رقم زوجي وعددها 1 ومنه: $P(A\cap C)=\frac{1}{7}$
- الحادث $B\cap C$: الكرة بيضاء وتحمل رقم زوجي وعددها 2 ومنه $P(B\cap C)=\frac{2}{7}$
- الحادث $A\cup B$: الكرة سوداء أو بيضاء

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=1$$

- الحادث $A\cup C$ ، $P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)=\frac{7}{3}+\frac{3}{7}-\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=\frac{3}{7}+\frac{3}{7}-\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$$

تطبيق . 7 : حساب احتمال حوادث

لأداء دور سينمائي على المخرج أن يختار شخصيتين من مجموعة تتكون من 3 نساء و 4 رجال.
1) أوجد عدد الحالات الممكنة
2) أحسب عدد الحالات التي تكون فيها الثنائيات مكونة من نساء فقط
- أوجد احتمال الحادثة " الشخصيتين المختارتين نساء"

✓ الحل :

1) نحاكي هذه التجربة مع تجربة " سحب كرتين من كيس يحتوي على 7 كرات مرقمة 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 على التوالي بدون إرجاع
- ظهور أحد الأرقام 1، 2، 3 " معناه أن الشخصية امرأة"
وظهور أحد الأرقام 4، 5، 6، 7 معناه أن الشخصية رجل
لإيجاد عدد الحالات الممكنة نتبع طريقة ملئ الخانات
الخانة الأولى لها 7 اختيارات و الخانة الثانية لها 6 اختيارات
إذن عدد الحالات الممكنة هو : $6\times7=42$

الخانة 2	الخانة 1

2) لإيجاد عدد الثنائيات التي عناصرها نساء نتبع طريقة ملئ الخانات :

الخانة 2	الخانة 1

الخانة الأولى لها 3 اختيارات ، الخانة الثانية لها اختيارين ومنه عدد الحالات التي يكون فيها الثنائيات مكونة من نساء فقط هي : $3\times2=6$.

□ A : " الحادثة الشخصيتين المختارتين نساء"

	1	2	3	4	5	6	7
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,7)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(5,7)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	(6,7)
7	(7,1)	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	(7,7)

الثنائيات : $(1,2)$ ، $(2,1)$ ، $(1,3)$ ، $(3,1)$ ، $(2,3)$ ، $(3,2)$ تعبر على أن الشخصيتين المختارتين من النساء
احتمال الحادثة A هو $P(A)$ حيث: $P(A)=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}$.

تطبيق . 8 : حساب احتمال حوادث

مجموعة متكونة من 100 شخص 60 % رجال نعلم أن ، 20 % من الرجال و 25 % من النساء يتكلمون الإنجليزية نختار شخص عشوائيا من هذه المجموعة ، ما هي احتمالات الحوادث التالية : A : " رجل يتكلم الإنجليزية " ، B : " امرأة لا تتكلم الإنجليزية " ، C : " شخص يتكلم الإنجليزية "

✓ الحل :

في هذه التجربة كل شخص له نفس الاحتمال ، 60 % رجالا يمثلون 60 رجل و عدد النساء هو : 40 امرأة.
20 % عدد الرجال الذين يتكلمون الإنجليزية هو 12 ومنه : $\frac{60\times20}{100}=\frac{1200}{100}=12$

$$P(A)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}=\frac{12}{100}=0,12$$

25 % نساء يتكلمون الإنجليزية وعدد هذه النساء هو $\frac{25\times40}{100}=10$ ومنه : $P(B)=0,1$

□ شخص يتكلم الإنجليزية إما أن يكون رجل أو امرأة و بالتالي :

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,12+0,1-0=0,22$$

لأن الحادثتين A و B غير متلائمتين ($A\cap B=\phi$)

تطبيق . 9 : حساب احتمال حوادث (معادلات من الدرجة الثانية)

نعتبر المعادلة : $x^2+mx+p=0$

نرمي زهرة نرد متزن مرقمة من 1 إلى 6 . العدد الذي يظهر بعد الرمي يمثل m . ولما نرمي حجرة النرد للمرة الثانية فالعدد الذي يظهر يمثل P

1) ما هو احتمال المعادلة المعطاة تقبل حلين مختلفين

2) ما هي احتمال أن هذه المعادلة تقبل حل مضاعف

3) ما هو احتمال ان هذه المعادلة لا تقبل اي حل حقيقي .

الحل :

$m\in\{1,2,3,....,6\}$ ، $P\in\{1,....,6\}$ نحسب عدد الحالات الممكنة للتجربة عشوائية "رمي الحجر مرتين" بطريقة ملئ الخانات .

في لخانة الأولى لها 6 اختيارات ، الخانة الثانية لها 6 اختيارات و منه عدد الحالات الممكنة $6\times 6=36$

والنتائج الممكنة هي عبارة عن ثنائيات (m,p) كما هي موضحة في الجدول المقابل :

	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

1) المعادلة لها حلين معناه ان المميز اكبر من الصفر اي $m^2-4p\rangle 0$

$m^2\rangle 4p$ معناه أن : $m\rangle 2\sqrt{P}$ لكن : m هو عدد طبيعي

- إذا كان : $P=1$ فإن : $m\rangle 2$ ومنه الثنائيات (m,P) في هذه الحالة هي :
$(6,1)$ ، $(5,1)$ ، $(4,1)$ ، $(3,1)$
- إذا كان : $P=2$ فإن : $m\in\{3,4,5,6\}$ ومنه توجد اربعة ثنائيات
- إذا كان : $P=3$ فإن : $m\in\{4,5,6\}$ ومنه توجد ثلاث ثنائيات
- إذا كان : $P=4$ فإن : $m\in\{5,6\}$ ومنه توجد ثنائيتين
- إذا كان : $P=5$ فإن : $m\in\{5,6\}$ ومنه توجد ثنائيتين
- إذا كان : $P=6$ فإن : $m\in\{5,6\}$ ومنه توجد ثنائيتين

إذن لكي تقبل المعادلة حلين توجد 17 حالة ملائمة وبالتالي احتمال هذه الحادثة A هو: $P_1=\frac{17}{36}$

2) المعادلة لها حل مضاعف هذا معناه $m^2-4P=0$ أي : $m^2=4p$

بما أن m^2 مربع تام فإن $4P$ مربع تام و منه نستنتج أن : $P=1$ أو $P=4$ وبالتالي توجد ثنائيتين $(m,P)=(2,1)$ أو $(m,P)=(4,4)$ وبالتالي احتمال هذه لحادثة هو : $\frac{2}{36}$

3) احتمال المعادلة ليس لها حلول : إذا كانت A هي الحادثة المعادلة لها حلين B الحادثة المعادلة لها حل مضاعف و C الحادثة المعادلة ليس لها حلول فإن : $C=\overline{A\cup B}$ ومنه احتمال C هو : $P(C)=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[(PA)+P(B)-P(A\cap B)]=\frac{17}{36}$

تطبيق . 10 : التغير العشوائي - قانون احتمال - الأمل الرياضي و الانحراف المعياري

لتكن Ω حيث: $\Omega=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

نعرف على Ω قانون متساوي الاحتمال ، X هو المتغير العشوائي المعرف على Ω الذي يرفق بكل عدد من Ω مربعه . عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب الأمل الرياضي و الانحراف المعياري

الحل :

مجموعة القيم التي يأخذها X هي : $25,16,9,4,1,0$

- $(X=0)$ " يوجد عدد واحد مربعه 0 " ومنه : $P(X=0)=\frac{1}{11}$
- $(X=1)$ " يوجد عددان مربع كل منهما هو 1 " $P(X=1)=\frac{2}{11}$
- $(X=4)$ " يوجد عددان مربع كل منهما يساوي 4 " $P(X=4)=\frac{2}{11}$

$P(X=25)=\frac{2}{11}$ ، $P(X=16)=\frac{2}{11}$ ، $P(X=9)=\frac{2}{11}$ منه قانون احتمال هو

x_i	0	1	4	9	16	25
p_i	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$

$$E(X)=0\times\frac{1}{11}+1\times\frac{2}{11}+4\times\frac{2}{11}+9\times\frac{2}{11}+16\times\frac{2}{11}+\frac{25\times 2}{11}=\frac{114}{11}$$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{i=5}p_i(x_i-E(X))^2=\sum_{i=1}^{i=5}x_i^2P_i-E^2(X)=70,59$$ منه $\sigma(X)=\sqrt{70,59}=8,40$

تطبيق . 11 : الأمل الرياضي و الانحراف المعياري

الجدول التالي يعرف قانون احتمال للمتغير عشوائي X

X	-2	-1	0	1	2	3
P_i	0,1	0,2	0,25	0,25	0,05	0,15

1) احسب احتمال الحادثتين التاليتين $A=\{X\geq 0\}$, $B=\{X<2\}$

2) احسب $E(X)$ و $\sigma(X)$

✓ الحل :

1) الحادثة : " $X\geq 0$ " معناه X قيمه هي : $0,1,2,3$ وعليه :

$$P(A)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0{,}70$$

□ الحادثة : " $X<2$ " معناها X قيمه هي : $-2,-1,0,1$

وعليه : $P(X<2)=P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=0{,}80$

2) $E(X)=\sum_{i=1}^{i=6}x_i P_i=-2\times 0{,}1+(-1)\times(0{,}2)+0+1\times 0{,}25+2\times 0{,}05+3\times 0{,}15=0{,}4$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{i=6}x_i^2 P_i-(E(X))^2=2{,}24\quad,\quad \sigma(X)=\sqrt{2{,}24}=1{,}49$$

تطبيق . 12 : تعيين قانون احتمال وحساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري

نرمي حجري نرد متزنتين وجوهها مرقمة من 1 إلى 6

المجموعة Ω هي مجموعة الثنائيات (x,y) مع $6\geq x\geq 1$ و $6\geq y\geq 1$

نعرف عليها قانون متساوي الاحتمال ونعرف المتغير العشوائي X على Ω

الذي يرفق بكل ثنائية (x,y) العدد الحقيقي $|x-y|$

1) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

2) أحسب الأمل الرياضي و الانحراف المعياري لـ X

✓ الحل :

1) مجموعة قيم X هي : $\{0,1,2,3,4,5\}$ و مجموعة الإمكانيات $6\times 6=36$

- عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادثة $(X=1)$ هو 10 ومنه $P(X=1)=\frac{10}{36}$

- عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادثة : $(X=2)$ هي 8 ومنه $P(X=2)=\frac{8}{36}$
- عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث : $(X=3)$ هو 6 ومنه : $P(X=3)=\frac{6}{36}$
- عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث $(X=4)$ هو 4 ومنه : $P(X=4)=\frac{4}{36}$
- عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث $(X=5)$ هو 2 ومنه : $P(X=5)=\frac{2}{36}$
- عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث $(X=0)$ هو 6 ومنه : $P(X=0)=\frac{6}{36}$

X_i	0	1	2	3	4	5
P_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

2) $E(X)=\sum_{i=1}^{i=6}x_i P_i=\frac{10}{36}+\frac{16}{36}+\frac{18}{36}+\frac{10}{36}=\frac{60}{36}=1{,}66$

$V(X)=\sum_{i=1}^{i=6}x_i^2 P_i-(E(X))^2=3{,}08$ ومنه $\sigma(x)=\sqrt{v(x)}=1{,}75$

تطبيق . 13 : تعيين قانون احتمال وحساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري

كيسين A و B حيث A يحتوي على ثلاث كرات مرقمة من 1 إلى 3 و B تحتوي على ثلاث كرات مرقمة $2, 3, 4$ نسحب كرة من A وكرة من B

1) X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب من A و B مجموع الرقمين المحصل عليهما .

عين قانون احتمال للمتغير العشوائي X واحسب : $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$

2) الأعداد المكتوبة على الكرات نضاعفها خمس مرات و نقوم بنفس السحب السابق .

Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب من A و B مجموع الرقمين المحصل عليهما عين قانون احتمال للمتغير العشوائي Y

واحسب $E(Y)$, $V(Y)$, $\sigma(Y)$

3) بين ان : $E(Y)=5E(X)$ و $\sigma(Y)=5\sigma(X)$

✓ الحل :

1) مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : $3, 4, 5, 6, 7$

عدد الحالات المكنة للحسب هي : $3\times 3=9$

	1	2	3
2	(2 ,1)	(2 ,2)	(2 ,3)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3 , 3)
4	(4,1)	(4, 2)	(4, 3)

الحادثة : " $X=3$ " هي ظهور الثنائية ، $(2\,,1)$ ومنه ؛ $P(X=3)=\frac{1}{9}$

- الحادثة " $X=4$ " ، عدد الحالات الملائمة لتحقيقها هو 2 ومنه ، $P(X=4)=\frac{2}{9}$
- عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادثة ، $(X=5)$ هو 3 ومنه $P(X=5)=\frac{3}{9}$
- عدد الحالات الملائمة لتحيق ا الحادثة ، $(X=6)$ هي 2 ومنه $P(X=6)=\frac{2}{9}$
- عدد الحالات الملائمة لتحيق ا الحادثة ، $(X=7)$ هي 1 ومنه $P(X=7)=\frac{1}{9}$

x_i	3	4	5	6	7
P_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

2) $E(X)=\sum x_i\,P_i=5$

$V(X)=\sum x_i^2\,P_i-\left(E(X)\right)^2=26{,}33-25=1{,}33$ ومنه $\sigma(X)=\sqrt{1{,}33}=1{,}15$

القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y هي : 15 ، 20 ، 25 ، 30 ، 35

عدد الحالات الممكنة للسحب هي : $3\times3=9$ ، بنفس الطريقة السؤال 1) نجد ،

y_i	15	20	25	30	35
P_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

3) $E(Y)=25$ ، $V(Y)=25\times1{,}33=33{,}25$ ، $\sigma(Y)=5{,}76$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{i=5}n'_i\,P_i=\sum_{i=1}^{i=5}5n_i\,P_i=5\sum_{i=1}^{i=5}n_i\,P_i=5E(X)$$

$$V(Y)=\sum_{i=1}^{i=5}p_i\,y_i^2-\left(E(Y)\right)^2=\sum_i P_i\,(5x_i)^2-25\,E^2(X)=25\,V(X)$$ و منه $\sigma(Y)=5\,\sigma(X)$

تطبيق 14 : تعيين قانون احتمال وحساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري

لعبة تتمثل في رمي حجري نرد متزن أوجه كل منهما مرقمة من 1 إلى 6 ، لاعب يراهن بـ 100 دينار على الرقم 5 . إذا ظهر هذا الرقم على وجهي الحجرين يربح 400 دينار وإذا ظهر على حجر واحد من الحجرين يربح 300 دينار وفي الحالات الأخرى يخسر رهانه ، الربح أو الخسارة المتحصل عليها منقوص منها الرهان تعرف متغير عشوائي X

1) ما هي قيم المتغير العشوائي X

2) أعط قانون احتمال للمتغير العشوائي X ، 3) احسب $E(X)$ و $\sigma(X)$

الحل :

1) عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة " اللعبة " هي : 6×6 وتساوي 36

القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : -200 ، 200 ، 300

لأن عندما يظهر الرقم 5 على الحجرين الربح يكون 400 ومنه $X=400-100=300$

عندما يظهر الرقم 5 على حجر واحد فالربح هو 300 ومنه ، $X=300-100=200$

عندما لا يظهر الرقم 5 فالخسارة هي : -100 ومنه: $X=-100-100=-200$

2) قانون احتمال للمتغير العشوائي X

عدد الحالات الملائمة لتحقيق $X=300$ هي 1 ومنه ؛ $P(X=300)=\frac{1}{36}$

عدد الحالات الملائمة لتحقيق $X=200$ هي 10 ومنه ؛ $P(X=200)=\frac{10}{36}$

عدد الحالات الملائمة لتحقيق $X=-200$ هي 25 ومنه ؛ $P(X=-200)=\frac{25}{36}$

X	300	200	-200
P_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

3) $$E(X)=\sum_{i=1}^{3}P_i\,x_i=\frac{300}{36}+\frac{2000}{36}-\frac{5000}{36}=\frac{-2700}{36}=-75$$

$$V(X)=\sum_{1}^{3}P_i\,x_i^2-(EX)^2=\sum_{1}^{3}P_i\,x_i^2-\left(E(X)\right)^2=23541{,}66$$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=153{,}44$ بما أن $E(X)=-75$ فإن اللعب غير متزن واللاعب إذا لعب كثيرا يفقد رهانه .

تطبيق . 15 : تعيين قيم المتغير العشوائي - قانون احتمال و الأمل الرياضي

في لعبة الدومينو، كل حجرة دومينوا مقسومة على إثنين كلا منهما يحمل رقما من 0 إلى 6 ممثله بنقط

1) بين أن عدد أحجار الدومينوا هي 28

2) لاعب يسحب عشوائيا حجرة دومينو

أ) ما هو إحتمال الحصول على حجر يحمل نفس الرقم على الجزئين

ب) ما هو احتمال لحصول على دومينو بحيث مجموع أرقام جزئية يقبل القسمة على 3

3) X متغير عشوائي الذي يأخذ القيمة (-1) لما اللاعب يتحصل على دومينو غير مضاعف الرقم على الجزئين ويأخذ القيمة n عندما يتحصل على حجر مضاعف الارقام ما هو قانون احتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $E(X)$

الحل :

1) عدد احجار الدومينو نوجدها بطريقة ملأ الخانات، بما أن حجر الدومينو مقسوم إلى قسمين فإن الخانة الأولى لها سبعة اختيارات والثانية لها 7 اختيارات وبالتالي عدد الحالات الكلية هو 49 وبالتالي عدد احجار الدومينو : $28=49-(6+5+4+3+2+1)$

2) أ) احتمال الحصول على حجر مضاعف الرقم هو : $P=\frac{7}{49}$

ب) احتمال الحصول على دومينوا بحيث مجموع أرقامه يقبل القسمة على 3 هو $P'=\frac{9}{49}$

3) أ) مجموعة قيم المتغير العشوائي هي: $\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ وقانون الاحتمال هو

X	-1	0	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{42}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{49}$

ب) $E(X)=\sum_{1}^{7} P_i x_i=\frac{-21}{49}$ بما ان $E(X)<0$ فإن اللاعب خاسر (اللعب غير متزن)

تطبيق . 16 : نمذجة ومحاكاة (عيد ميلاد)

كيس يحتوي على 365 كرة مرقمة من 1 إلى 365 (بنفس أيام السنة)

- معرفة تاريخ ميلاد n شخص مختارين عشوائيا يعود إلى سحب n كرة من الكيس على التوالي مع الإرجاع .

1) ما هو احتمال أن شخصين مختارين عشوائيا ليس لهما نفس يوم الميلاد مثنى مثنى

2) أ) ما هو احتمال أن ثلاث أشخاص مختارين عشوائيا ليس لهم يوم الميلاد مثنى مثنى

ب) ما هو عند ئذا احتمال أن على الأقل شخصين من الثلاثة لهما نفس يوم الميلاد

3) A_n حادثة " من بين n شخص مختارين " عشوائيا ايام ميلادهم مختلفة

أ) احسب $P(A_4)$ ثم تحقق أن $P(A_4)=P(A_3)\times\frac{362}{365}$

ب) برر العلاقة التالية : $P(A_{n+1})=P(A_n)\times\frac{365-n}{365}$

ج) بين أن العدد $P(A_n)$ يتناقص لما n تتزايد

الحل :

1) نستعمل طريقة ملئ الخانات لتعيين عدد الحالات الملائمة وكل شخص تقابله خانة .

خانة 1	خانة 2

الخانة الأولى لها 365 اختيار والخانة الثانية لها 364 اختيار

إذن الحالات الملائمة هو : 365×364 و عدد الحالات الممكنة هو : 365×365

وبالتالي احتمال الحادثة "شخصين مختارين عشوائيا ليس لهما نفس يوم الميلاد" هو $\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}$

2) أ) نستعمل طريقة ملئ الخانات لتعيين عدد الحالات الملائمة وكل شخص تقابله خانة

خانة 1	خانة 2	خانة 3

الخانة الأولى لها 365 اختيار ، الخانة الثانية لها 364 اختيار ، الخانة الثالثة لها 363 اختيار

و بالتالي عدد الحالات الملائمة هو : $365\times364\times363$

إذن احتمال الحادثة " ثلاث أشخاص مختارين عشوائيا ليس لهم نفس يوم ميلاد مثنى مثنى " هو : $\frac{365\times364\times363}{365\times365\times365}$

ب) الحادثة : " على الأقل شخصين من ثلاثة لهما نفس يوم الميلاد " هي الحادثة العكسية للحادثة " ثلاث أشخاص ليس لهم نفس يوم الميلاد مثنى مثنى " إذا رمزنا إلى الحادثة الأولى بـ X والثانية بـ Y فإن $p(X)=1-p(Y)=1-\frac{365\times364\times363}{(365)^3}$

3) أ) الحادثة A_4 " من بين أربعة أشخاص مختارين عشوائيا يوم ميلادهم مختلفة "

عدد حالات الملائمة نتحصل عليها بملئ الخانات الأربعة حيث نجد عدد الحالات الملائمة هو $365\times364\times363\times362$ ومنه : $P(A_4)=\frac{365\times364\times363}{(365)^3}\times\frac{362}{365}=P(A_3)\times\frac{362}{365}$

ب) A_{n+1} هي الحادثة " من بين $n+1$ شخص مختارين عشوائيا كل أيام ميلادهم مختلفة "

لتعيين عدد الحالات الملائمة نستعمل طريقة ملأ الخانات حيث كل شخص تقابله خانة

الخانة الأولى لها 365 اختيار ، الخانة الثانية لها 364 اختيار

الخانة n لها : $(365-n+1)$ اختيار ، الخانة $n+1$ لها $((365-(n))$ اختيار

و عليه عدد الحالات الملائمة هي : $365\times 364 \ldots\times(365-n)(365-(n+1))$

إذن احتمال الحادثة A_{n+1} هو:

$$P(A_{n+1})=\frac{365\times 364\times\ldots\times(365-n+1)(365-(n))}{(365)^{n+1}}$$

لكن : $P(A_n)=\frac{365\times\ldots\times(365-n+1)}{(365)^n}$ إذن: $P(A_{n+1})=\frac{P(A_n)\times[365-(n)]}{365}$

ج) لدينا : $\frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)}=\frac{365-n}{365}$ بما أن : $0<n<365$ فإن : $\frac{365-n}{365}<1$ ومنه :

$\frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)}<1$ أي : $P(A_{n+1})<P(A_n)$ مما يدل على أن : $P(A_n)$ متناقصة لما n تتزايد .

تطبيق . 17 : حساب احتمال حادثة

نرمي ثلاث أحجار غير مزيفة ومتزنة ذات ألوان مختلفة في الهواء ونقوم بحساب مجموع الأرقام التي تظهر على الوجه العلوي لكل حجر

1) بين أن المتغير العشوائي X الذي يمثل مجموع أرقام التي تظهر على الوجه العلوي لكل حجر يأخذ قيما طبيعية من 3 إلى 18

2) كررنا هذه التجربة 2000 مرة فتحصلنا على النتائج التالية :

X	3	4	5	6	7	8	9	10
التكرار	12	20	36	104	158	180	256	258
X	11	12	13	14	15	16	17	18
التكرار	246	220	172	138	106	58	24	12

- أحسب تواتر كل مجموع

3) أ) ما هو احتمال الحادثة " $X=3$ " ، ب) ما هو احتمال الحادثة " $X=4$ "

ج) ما هو احتمال الحادثة " $X=10$ " ، د) ما هو احتمال الحادثة " $X=9$ "

✓ الحل :

1) بما أن كل وجه عميل رقم a محصور بين 1 و 6 أي: $1\le a\le 6$ فإن أصغر مجموع نتحصل عليه إذا ظهر الرقم 1 على الأحجار الثلاثة وهذا المجموع يساوي 3 وأكبر مجموع نتحصل عليه عندما يظهر الرقم 6 على الأحجار الثلاثة وهذا المجموع هو 18

إذن المتغير العشوائي X يأخذ قيما طبيعية من 3 إلى 18

(2

X	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	$\frac{12}{2000}$	$\frac{20}{2000}$	$\frac{36}{2000}$	$\frac{104}{2000}$	$\frac{158}{2000}$	$\frac{180}{2000}$	$\frac{256}{2000}$	$\frac{258}{2000}$

X مجموع الأرقام	11	12	13	14	15	16	17	18
f_i	$\frac{246}{2000}$	$\frac{220}{2000}$	$\frac{172}{2000}$	$\frac{138}{2000}$	$\frac{106}{2000}$	$\frac{58}{2000}$	$\frac{24}{2000}$	$\frac{12}{2000}$

3) عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هي : $6\times 6\times 6=216$

أ) الحصول على المجموع 3 بطريقة وحيدة وهي لما يظهر الرقم 1 على كل حجر من الأحجار الثلاثة وبالتالي عدد لحالات اللائمة لتحقيق لحادثة $X=3$ هو 1 إذن $P(X=3)=\frac{1}{216}$

ب) الحصول على المجموع 4 بثلاث طرق هي لما تظهر الأرقام 1.1.2 أو 1.1.2 أو 1،2،1

وبالتالي عدد الحالات اللائمة لتحقيق الحادثة $X=4$ هي 3 إذن ؛ $P(X=4)=\frac{3}{216}$

ج) عدد الحالات اللائمة لتحقيق الحادثة " $X=10$ " هي 27 ومنه ؛ $P(X=10)=\frac{27}{216}$

د) عدد الحالات للائمة لتحقيق الحادثة " $X=9$ " هي 25 ومنه ؛ $P(X=9)=\frac{25}{216}$

تطبيق . 18 : سحب كرات من كيس

كيس يحتوي على كرة سوداء و n كرة بيضاء حيث ؛ $(n\ge 2)$ ، نسحب من الكيس كرة واحدة .... ونفرض ان كل السحبات متساوية الاحتمال

1) أ) أحسب $p_1(n)$ احتمال الحصول على كرة بيضاء .

ب) هل المتتالية $p_1(n)$ رتيبة ، ج) ما هي نهاية $p_1(n)$

2) أ) بين ان $p_2(n)$ احتمال سحب كرتين بيضاويتين في آن واحد يساوي $\frac{n-1}{n+1}$

ب) أدرس تغيرات $p_2(n)$ ، ج) قارن بين $p_1(n)$ و $p_2(n)$

د) اوجد قيم n بحيث ؛ $P_1(n)-P_2(n)>\frac{1}{6}$

✓ الحل :

1) أ) عدد الحالات الممكنة لسحب كرة واحدة هي ، $n+1$ و عدد الحالات الملائمة لسحب كرة بيضاء هو n ومنه ، $P_1(n)=\frac{n}{n+1}$

ب) $P_1(n+1)-P_1(n)=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}$

بما ان : $\frac{1}{(n+2)(n+1)}>0$ فإن ، $P_1(n+1)-P_1(n)>0$ ومنه المتتالية $P_1(n)$ متزايدة تماما

ج) $\lim_{n\to+\infty} P_1(n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$ النهاية تساوي 1 تدل على أن احتمال الحصول على كرة سوداء لما n يأخذ قيما كبيرة جدا هو عدد يؤول إلى الواحد

2) أ) إثبات أن : $P_2(n)=\frac{n-1}{n+2}$

$P_2(n)$ هو احتمال الحصول على كرتين بيضاويتين

نستعمل طريقة ملأ الخانات لتعيين عدد الحالات الممكنة

خانة 1	خانة 2

الخانة الأولى لها $n+1$ اختيار ، الخانة الثانية لها n اختيار

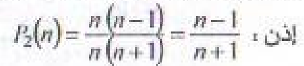
وعليه فإن عدد الحالات الممكنة هو : $n(n+1)$

- بنفس الطريقة السابقة نجد أن عدد الحالات الملائمة للحصول على كرتين بيضاويتين هو : $n(n-1)$ وهذا ناتج من كون أن:

الخانة الأولى لها n اختيار (إلا الكرات البيضاء)

الخانة الثانية لها $n-1$ اختيار (إلا الكرات البيضاء)

إذن ، $P_2(n)=\frac{n(n-1)}{n(n+1)}=\frac{n-1}{n+1}$



ب) دراسة تغيرات $P_2(n)$

$$P_2(n+1)-P_2(n)=\frac{n}{n+2}-\frac{n-1}{n+1}=\frac{n^2+n-n^2-n+2}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

بما أن $\frac{2}{(n+1)(n+2)}>0$ فإن : $P_2(n+1)-P_2(n)>0$ ومنه $P_2(n)$ متزايدة تماما

ج) المقارنة بين $P_1(n)$ و $P_2(n)$

$$P_2(n)-P_1(n)=\frac{n-1}{n+1}-\frac{n}{n+1}=\frac{-1}{n+1}$$

بما أن $\frac{-1}{n+1}<0$ فإن ، $P_2(n)-P_1(n)<0$ ، أي : $P_2(n)<P_1(n)$

د) $P_1(n)-P_2(n)=\frac{1}{n+1}$

$P_1(n)-P_2(n)>\frac{1}{6}$ تكافئ : $\frac{1}{n+1}>\frac{1}{6}$ تكافئ : $n+1<6$ تكافئ : $n<5$

ومنه مجموعة قيم n هي كل الأعداد الطبيعية الأصغر تماما من 5 وهي : 4 ، 3 ، 2

تمارين و مسائل

1 - كم عددا مؤلف من ثلاث أرقام يمكن تكوينه من الأرقام 1، 2، 3

2 في قسم يحتوي على 50 تلميذ منه 20 يدرسون الفرنسية و 15 يدرسون الإنجليزية و 9 يدرسون اللغتين .

من أجل تلميذ معين ليكن الحادثة A " تلميذ يدرس الإنجليزية " ، B الحادثة " تلميذ يدرس الفرنسية "

1) ماذا تمثل الحادثة $A\cap B$ ، 2) ماذا تمثل الحادثة $A\cup B$

3) كم تلميذ لا يدرسون لا الفرنسية ولا الإنجليزية

4) ما هو الحادثة العكسية لـ A

3 كيس يحتوي على 8 كرات ، منها ثلاث سوداء مرقمة من 1 إلى 3 و 5 حمراء مرقمة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 نسحب عشوائيا كرة من الكيس

1) أحسب احتمالات الحوادث التالية :

A " الكرة حمراء وتحمل الرقم 2 " B " الكرة حمراء وتحمل الرقم زوجي "

C " الكرة تحمل رقما فرديا "

2) ماهي احتمالات الحوادث التالية: $A\cap B$ ، $A\cap C$ ، $B\cap C$ ، $A\cup B$ ، $A\cup C$ ، $B\cup C$

4 الجدول التالي يمثل نتائج مجموعة تلاميذ في امتحان الرياضيات

	الذكور	الإناث
الناجحين	212	158
الراسبين	75	40

1) نختار عشوائيا تلميذ من هذه المجموعة ما هو احتمال أن هذا التلميذ ،

أ) ذكر ناجح ، ب) أنثى راسبة ، ج) راسب

2) نختار عشوائيا تلميذ ذكر ما هو احتمال أن يكون ناجح

3) نختار عشوائيا تلميذ راسب ما هو احتمال أن يكون أنثى

5 كيس يحتوي على 365 كرة مرقمة من 1 إلى 365 (بنفس أيام السنة)

يسحب يونس كرة عشوائيا ونسجل الرقم المكتوب عليها ثم نعيدها إلى الكيس ، عبد الباسط يقوم بدورة سحب كرة ويسجل الرقم المكتوب عليها

1) أ) ما هو احتمال حصولهما على عددين زوجين

ب) ما هو احتمال حصولهما على عددين فرديين

2) ما هو احتمال ان الولدين ميلادهم هو 18 جوان

3) ما هو احتمال ان الولدين لهما نفس يوم الميلاد (استعمل الحادث العكسي)

6 ترمي حجري نرد غير مزيفة و متزنة ذات الوان مختلفة في الهواء ونقوم بحساب مجموع الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين

1) بين أن المتغير العشوائي X الذي يمثل مجموع الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين ياخذ قيما طبيعية من 2 إلى 12

2) تكرر هذه التجربة 5000 مرة تحصلنا على النتائج التالية .

X	2	3	4	5	6	7
f_i	30	17	26	51	44	32
X	8	9	10	11	12	
f_i	73	61	13	43	110	

احسب تواتر كل مجموع ؟

3) أ) ما هو احتمال الحادثة $(X = 2)$

ب) ما هو احتمال الحادثة $(X = 4)$ ، ج) احتمال الحادثة $(X \leq 4)$

7 5 أشخاص A , B , C , D , E يشاركون في لعبة A و B لهما نفس خطوط الربح C , D , E لهم نفس الحظوظ في الربح لكن A و B لهما ضعف حظوظ الربح C , D , E

1) احسب احتمال الربح لكل شخص من الأشخاص

2) أ) ما هو احتمال ان ربح A أو B

ب) ما هو احتمال أن ربح C أو D أو E ، ج) ما هو احتمال ان ربح A أو D

8 نعتبر جملة معادلتين ذات المجهولين x , y التالية : $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ mx - ny = 6 \end{cases}$

المعاملين m و n مختارين بطريقة عشوائية من المجموعة ، $\{1,2,3,4,5,6\}$ كما يلي ،
نرمي حجر النرد ، الرقم الذي يظهر يمثل m نرمي ثانية الحجر ، الرقم الذي يظهر يمثل n

1) ما هو احتمال أن الجملة تقبل $(3,0)$ حلا لها

2) ما هو احتمال أن الجملة تقبل حلا وحيدا

3) ما هو احتمال أن الجملة لا تقبل حلولا

4) ما هو احتمال أن الجملة تقبل ما لا نهاية من الحلول

9 نرمي n مرة حجر نرد غير مزيف مرقم من 1 إلى 6

ما هي أصغر قيمة n_0 لعدد الرميات التي يلزم القيام بها بحيث : احتمال حصول على الأقل مرة واحدة الوجه 6 يفوق ، 0,9999 ؟ (استعمل الحادث العكسي — واستعمل طريقة ملئ الخانات لتعيين عدد الحالات الملائمة بحيث يؤخذ n خانة .

10 A و B حادثتين لنفس التجربة العشوائية بحيث ؛

$P(A) = 0{,}4$ ، $P(A \cup B) = 0{,}6$ ، $P(A \cap B) = 0{,}1$ - احسب $P(\overline{B})$

11 حجر نرد ذو ستة اوجه غير مزيفة و متزنةثلاث أوجه تحمل الرقم 6 ووجه يحمل الرقم 5 ووجهين يحملان الرقم 4 ما هو احتمال الحوادث التالية ؛

A ، الرقم الظاهر هو 6 . B ، الرقم الظاهر زوجي ، C ، الرقم الظاهر اكبر او يساوي 5

12 كيس يحتوي على 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6 نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد

1) عين المجموعة Ω مجموعة الإمكانيات

2) احسب احتمال الحادثتين A و B المعرفتين كما يلي ؛

A ، " نحصل على رقمين متتابعين " ، B ، نحصل على رقمين مجموعهما 6

13 قانون احتمال المتغير العشوائي X معطى بالجدول التالي ؛

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	0,14	0,21	0,24	0,15	؟	0,05

1) انقل ثم أكمل الجدول ، 2) أحسب $E(X)$ و $\sigma(X)$

14 نقوم بتجربة عشوائية تتمثل في رمي حجري نرد متزنتين مرتين أوجه الحجر الأول مرقمة من 1 إلى 6 و الحجر الثاني ، 3أوجه تحمل الرقم 0 ، ثلاث أوجه الأخرى تحمل الرقم 6 ، X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل إمكانية مجموع الرقمين الظاهرين على الحجرين . عين قانون احتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب $E(X)$

15 حجر نرد متوازن وجهين مرقمين بـ 1 و ثلاثة أوجه مرقمة بـ 2 ووجه مرقم بـ 6

نرمي هذا الحجر مرة في الهواء

-أعط قانون الاحتمال المرفق لهذه التجربة ثم احسب الأمل الرياضي والتباين .

16 حجر نرد ذو ستة أوجه ، وجه يحمل الرقم 1 وثلاثة أوجه تحمل الرقم 2 ووجهين يحملان الرقم 3 ، نرمي هذا الحجر مرتين متتاليتين ونجمع الرقمين المحصل عليهما وليكن S

1) ما هي القيم التي يأخذها S.
2) ما هي الستة الحالات الملائمة للحادثة $(S=3)$ وأحسب ؛ $P(S=3)$
3) أعط قانون احتمال المجموع S على شكل جدول ثم أحسب $E(S)$ و $\sigma(S)$

17 كيس A يحتوي على ثلاث كرات مرقمة 1 , 2 , 3
كيس B يحتوي على ثلاث كرات مرقمة 2 , 3 , 4
نسحب كرة من A وكرة من B ، وليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي مجموع الرقمين الظاهرين على الكرتين
1) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب الأمل الرياضي ، التباين و الانحراف المعياري
2) نفرض ان الأرقام المكتوبة على الكرات ضوعفت 20 مرة
وليكن Y مجموع الرقمين الظاهرين على الكرتين
أحسب $E(Y)$ ، $\sigma(Y)$ ثم بين ان ؛ $E(Y)=20E(X)$ و $\sigma(Y)=20\,\sigma(X)$

18 في معلم متعامد ومتجانس $\left(O , \vec{i} , \vec{j}\right)$ النقط $A(1, 0)$ ؛ $B(0 ,1)$ ، $C(-1, 0)$
مرفقة بالمعاملات 1 , b , c على الترتيب
1) ما هو شرط وجود مركز المسافات المتناسبة G للجملة $\{ (A , 1) , (B, b) , (C , c) \}$
ثم احسب عندئذ إحداثيات G بدلالة b و c
2) الثنائية (b,c) نتحصل عليها بالكيفية التالية :
b هو النتيجة الأولى في رمي حجر النرد متزن وجوهه تحمل الأرقام 3- , 2- , 1- , 1 , 2 , 3
c هو النتيجة الثانية في رمي نفس الحجر، نفرض ان كل ثنائية لها نفس احتمال الظهور ما هو احتمال أن الجملة المثقلة تقبل مركز المسافات المتناسبة G
أ) ترتيبها الرقم 1 ، ب) فاصلتها معدومة ، ج) تنتمي إلى المنصف الأول أو الثاني
$(Y=-x , Y=x)$.

19 عجلة سحرية مقسمة إلى ثلاث قطع متساوية هذه القطع مرقمة 0 , 1 , 2
1) نقوم بتدوير هذه العجلة ونعرف المتغير العشوائي X الذي قيمه α_i حيث α_i هي القيمة التي تتوقف عندها العجلة ما هو قانون احتمال X ثم أحسب الأمل الرياضي $E(X)$
2) نقوم بتدوير هذه العجلة مرتين متتاليتين ونعرف المتغير العشوائي y الذي قيمه هو جداء الرقمين اللذين تتوقف عند هما العجلة في المرتين
- ما هو قانون احتمال Y ثم احسب $E(Y)$



